

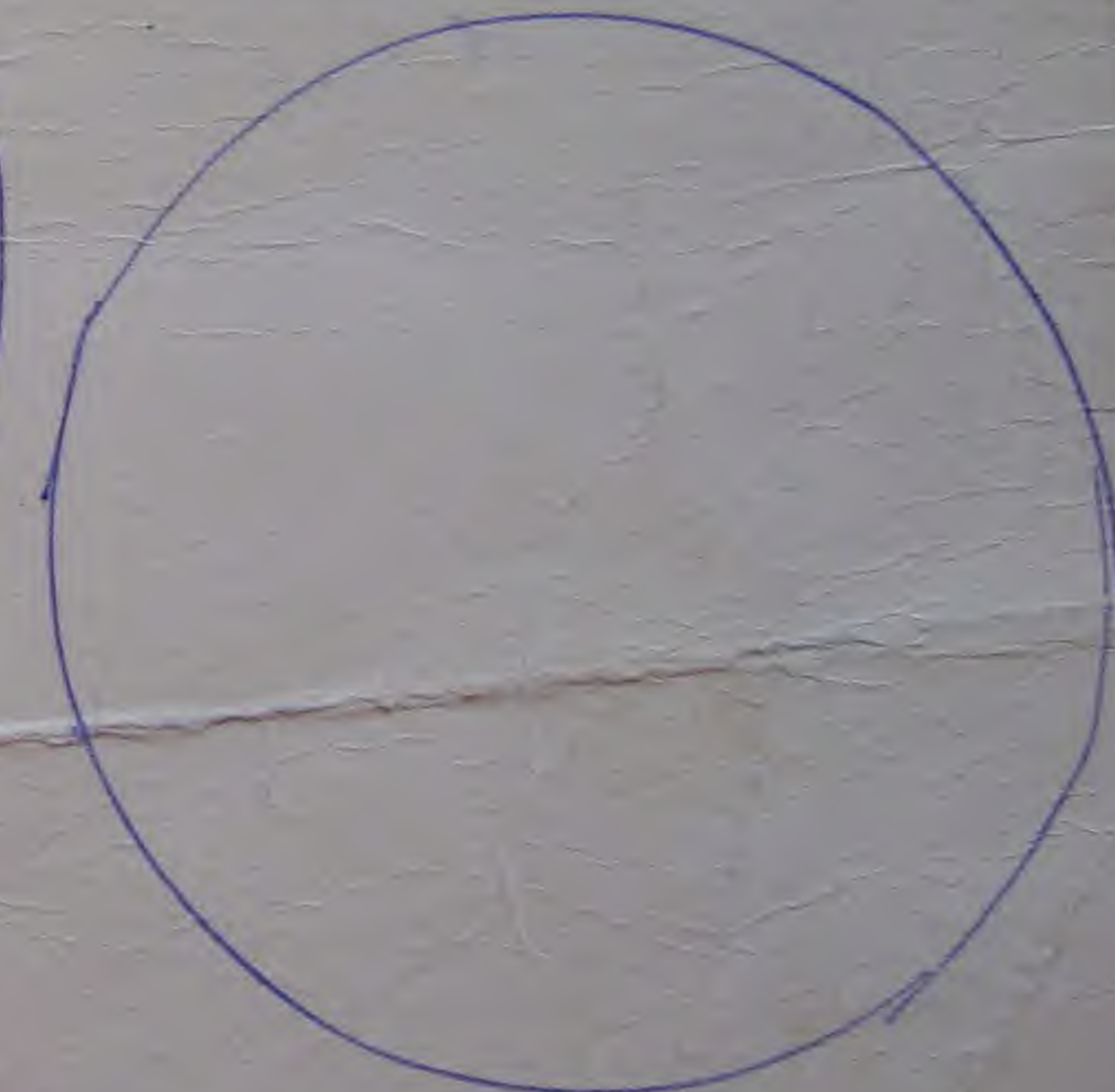
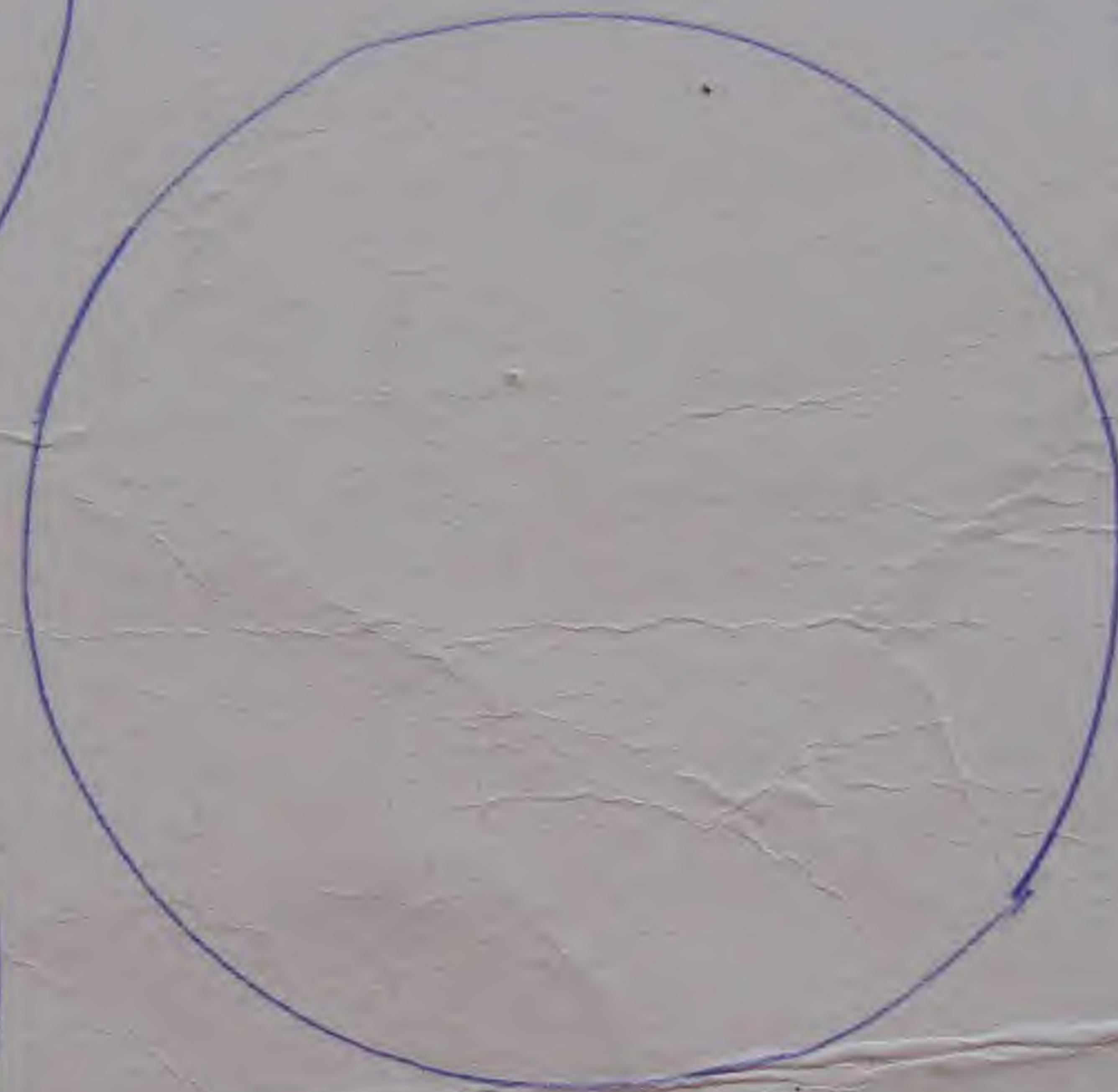
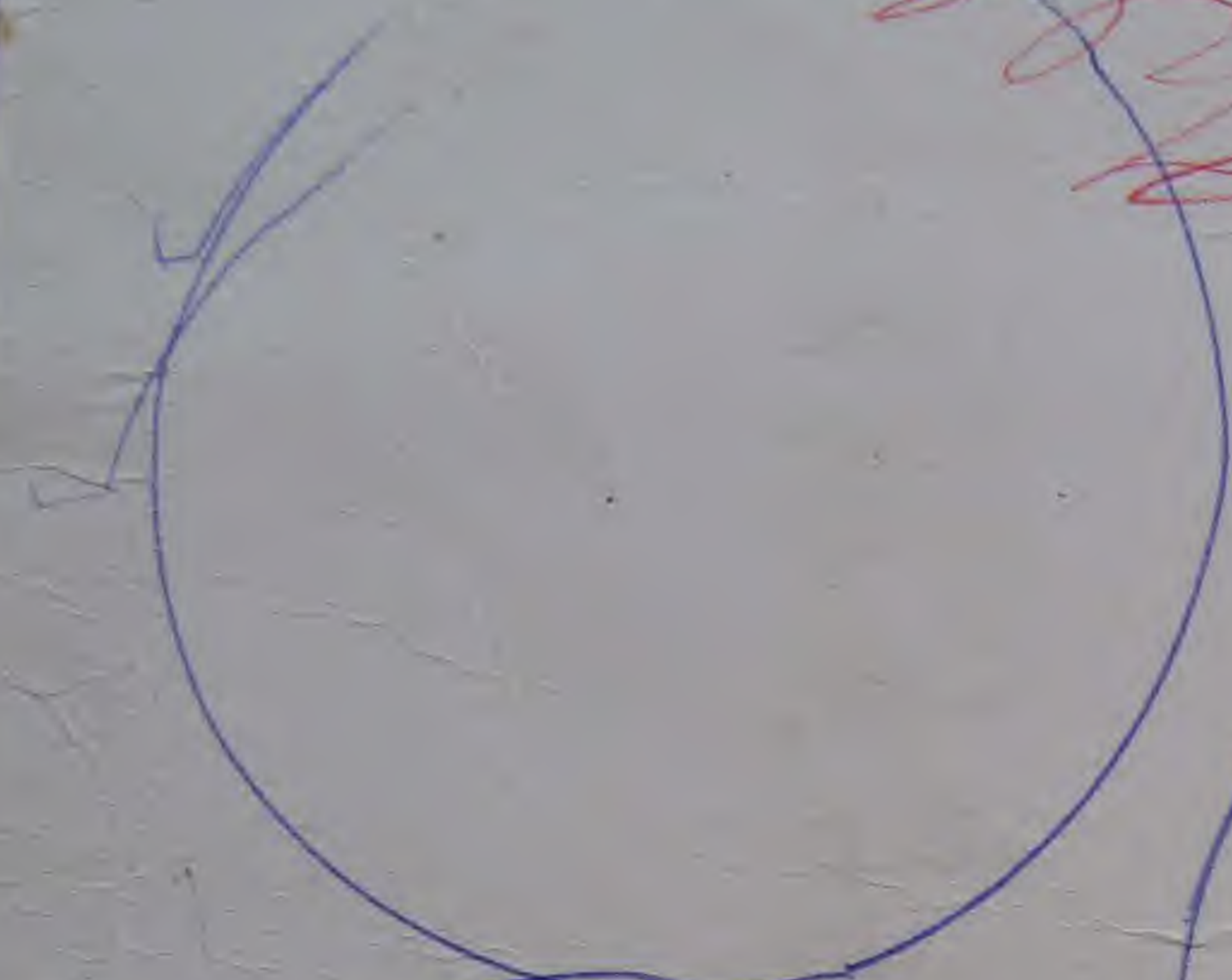
# Enghannofnir 3n1



7



*Handwritten in red ink:*  
~~22/5/2000~~

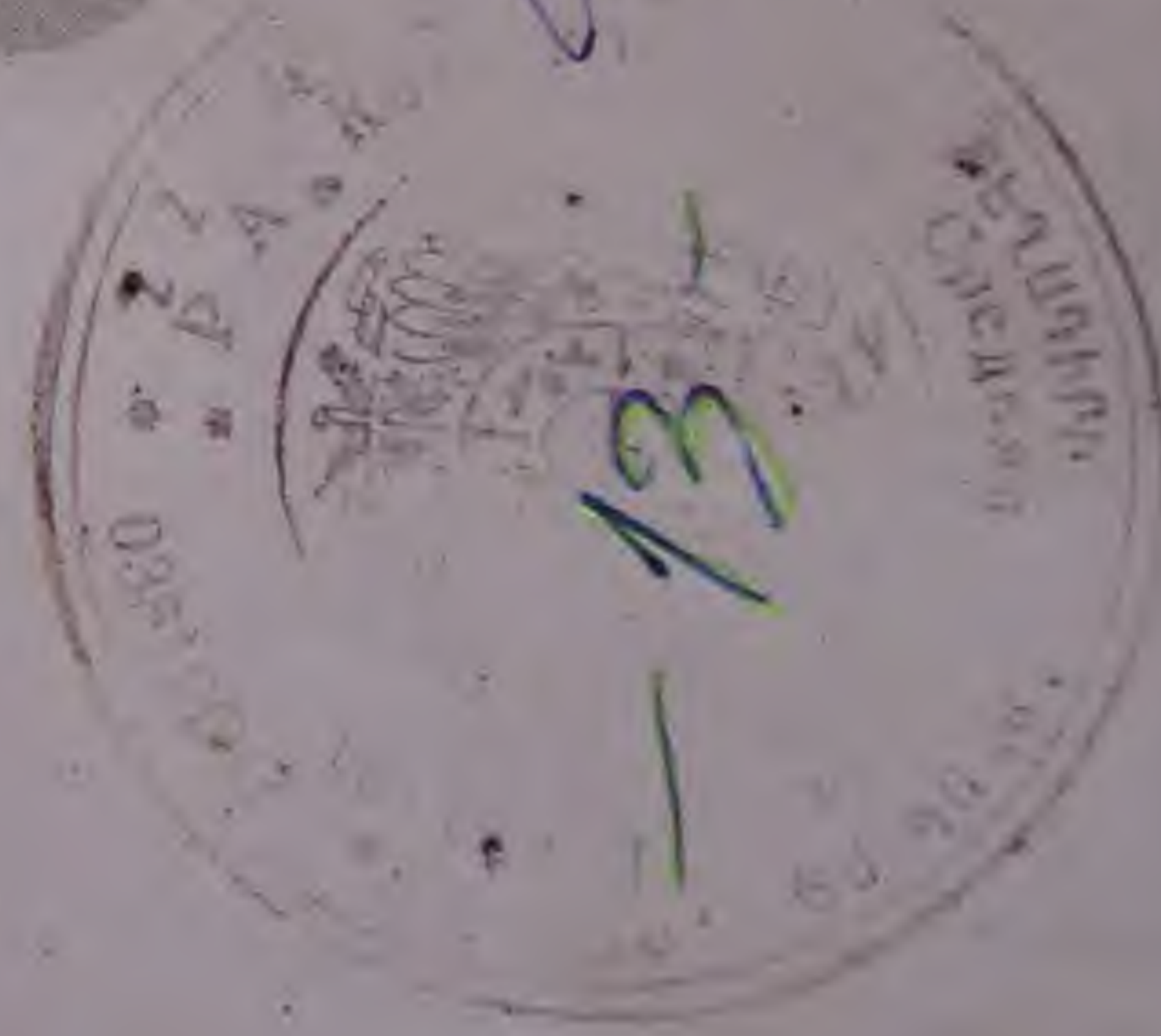
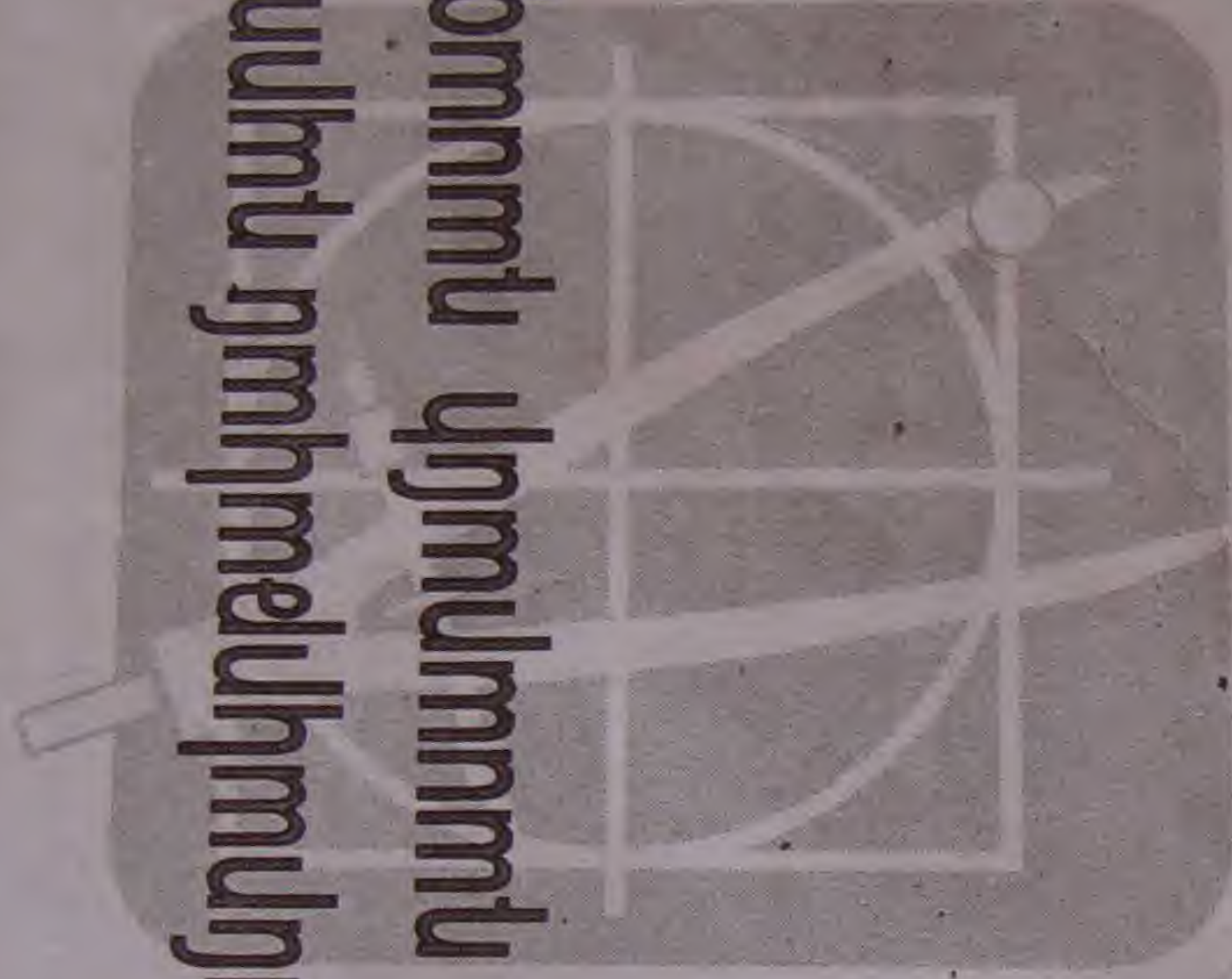




Լ. Ս. ԱԹԱՆԱՍՅԱՆ, Վ. Կ. ԲՈՒՏՈՒԶՈՎ,  
Ս. Բ. ՀԱՂՈՄՅԵՎ, Է. Գ. ՊՈԶՆՅԱԿ, Ի. Ի. ՅՈՒԴԻՆԱ

# ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ 7

Հանրակրթական դպրոցի  
7-րդ դասարանի դասագիրք



*[Handwritten signature]*

*[Handwritten signature]*

ԵՐԵՎԱՆ, «ԱՍՏՂԻԿ-59», 2000թ.

*[Multiple handwritten signatures and scribbles at the bottom of the page.]*



դՏՀ 373.167.1+514(075)

գԱԴ 22.151Գ72

Ե 894

## ՊԱՍՏԱԳԻՐՔԸ ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ Է ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ ԿՈՂՄԻՅ

Թարգմանված է ռուսերեն 9-րդ հրատարակությունից:

Պաստգիրքը համապատասխանեցված է առարկայական ծրագրին, օգտագործվել են «*Трассирование*» հրատարակչության տրամադրած կրացուցիչ նյութերը:

Թարգմանությունը, փոխադրումը և խմբագրումը՝ Ս. Է. Հախոբյանի

Մեթոդիստ՝ Ռ. Ս. Խաչատրյան

Հրատարակչության խմբագիր և խորհրդատու՝ Գ. Ա. Ղարազնեքաչյան

Ե 894

**Երկրաչափություն:** Հանրափրթական դպրոցի 7-րդ դասարանի դասագիրք / Լ. Ս. Աթանասյան, Վ. Ֆ. Բուսուլդով, Ս. Բ. Կարոնցև և ուրիշ: / թարգմ. և խմբ. Ս. Է. Հախոբյան. --Եր., Աստղիկ-59, 2000, -128 էջ:

Ե  $\frac{4306020502}{260(01) - 2000}$  2000 թ.

գԱԴ 22.151Գ72

ISBN 99930-857 2-3

© «Աստղիկ-59» հրատարակչություն, 2000թ.

© Թարգմ., խմբ. Ս. Է. Հախոբյան, 2000թ.

© «*Трассирование*» հրատարակչություն, 1999թ.

Все права защищены  
Բոլոր իրավունքները պաշտպանված են



# ԲԱՌԱՆԿՅՈՒՄՆԵՐ

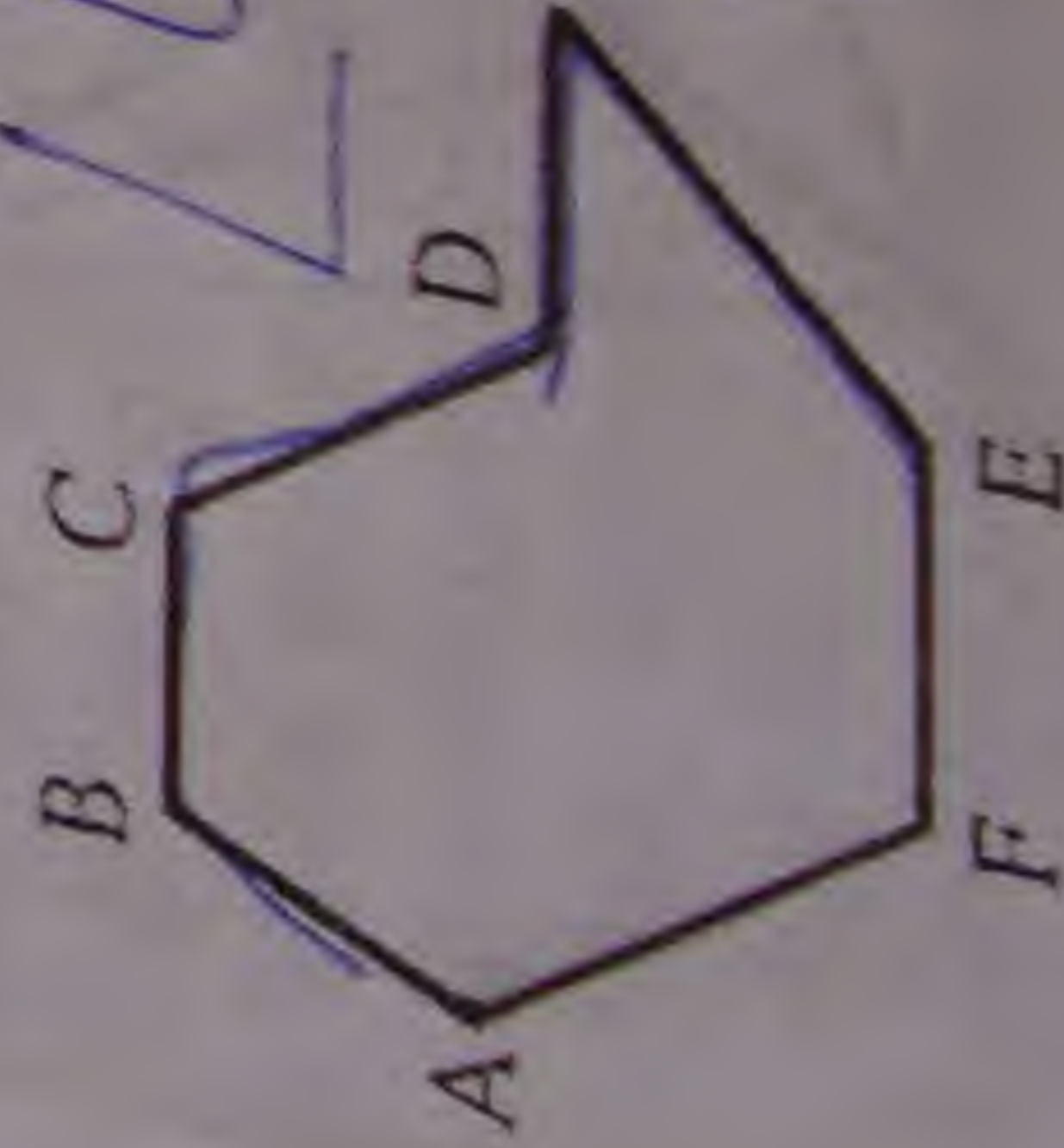
## § 1

### ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՄՆԵՐ

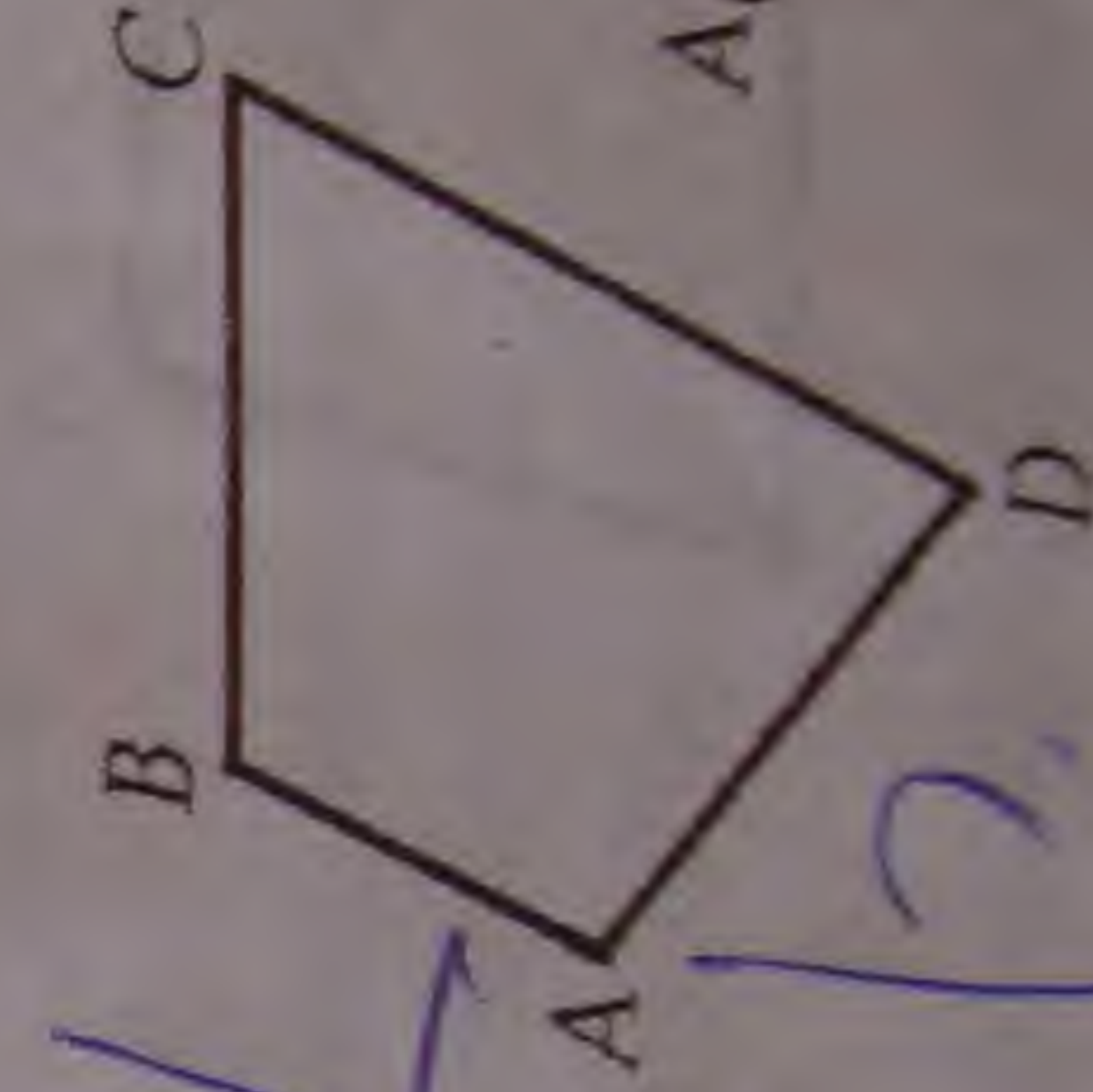
**1 Բազմանկյուն:** Դիտարկենք մի պատկեր, որը կազմված է  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ , ...,  $EF$ ,  $FA$  հատվածներից այնպես, որ  $կից$  հատվածները, այն է՝  $AB$  և  $BC$ ,  $BC$  և  $CD$ , ...,  $FA$  և  $AB$  հատվածները, չեն գտնվում մի ուղղի վրա, իսկ ոչ  $կից$  հատվածները ընդհանուր կետ չունեն: Այդպիսի պատկերը կոչվում է *բազմանկյուն* (նկ. 1):  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ...,  $E$ ,  $F$  կետերը կոչվում են բազմանկյան *գագաթներ*, իսկ  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ , ...,  $EF$  հատվածները՝ *կողմեր*: Բոլոր կողմերի երկարությունների գումարը կոչվում է բազմանկյան *առաքիծ*:

$n$  գագաթ ունեցող բազմանկյանն անվանում են  *$n$ -անկյուն*: Այն ունի  $n$  կողմ: Բազմանկյան օրինակ է եռանկյունը: Նկար 2-ում պատկերված են  $ABCD$  քառանկյունը և  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  վեցանկյունը: Նկար 3-ում պատկերված պատկերը բազմանկյուն չէ, քանի որ  $C_1C_5$  և  $C_2C_3$  (ինչպես նաև  $C_3C_4$  և  $C_1C_5$ ) ոչ  $կից$  հատվածներն ունեն ընդհանուր կետ:

Բազմանկյան մի կողմին պատկանող երկու գագաթները կոչվում են *հարևան* գագաթներ: Երկու՝ ոչ հարևան գագաթները միացնող հատվածը կոչվում է բազմանկյան *աճկյունագիծ*:



Նկ. 1



Նկ. 2







Նկ. 3

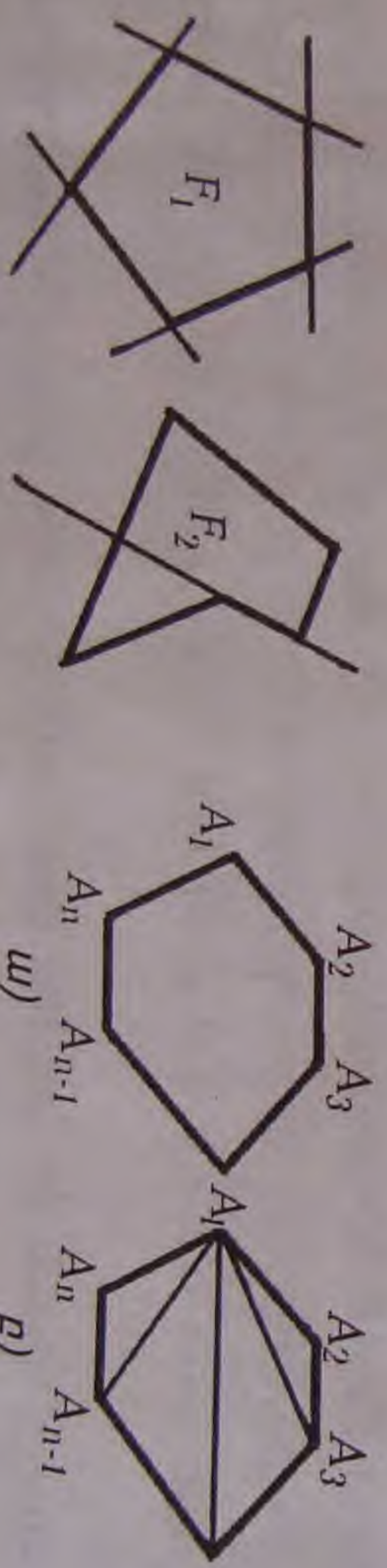


Նկ. 4

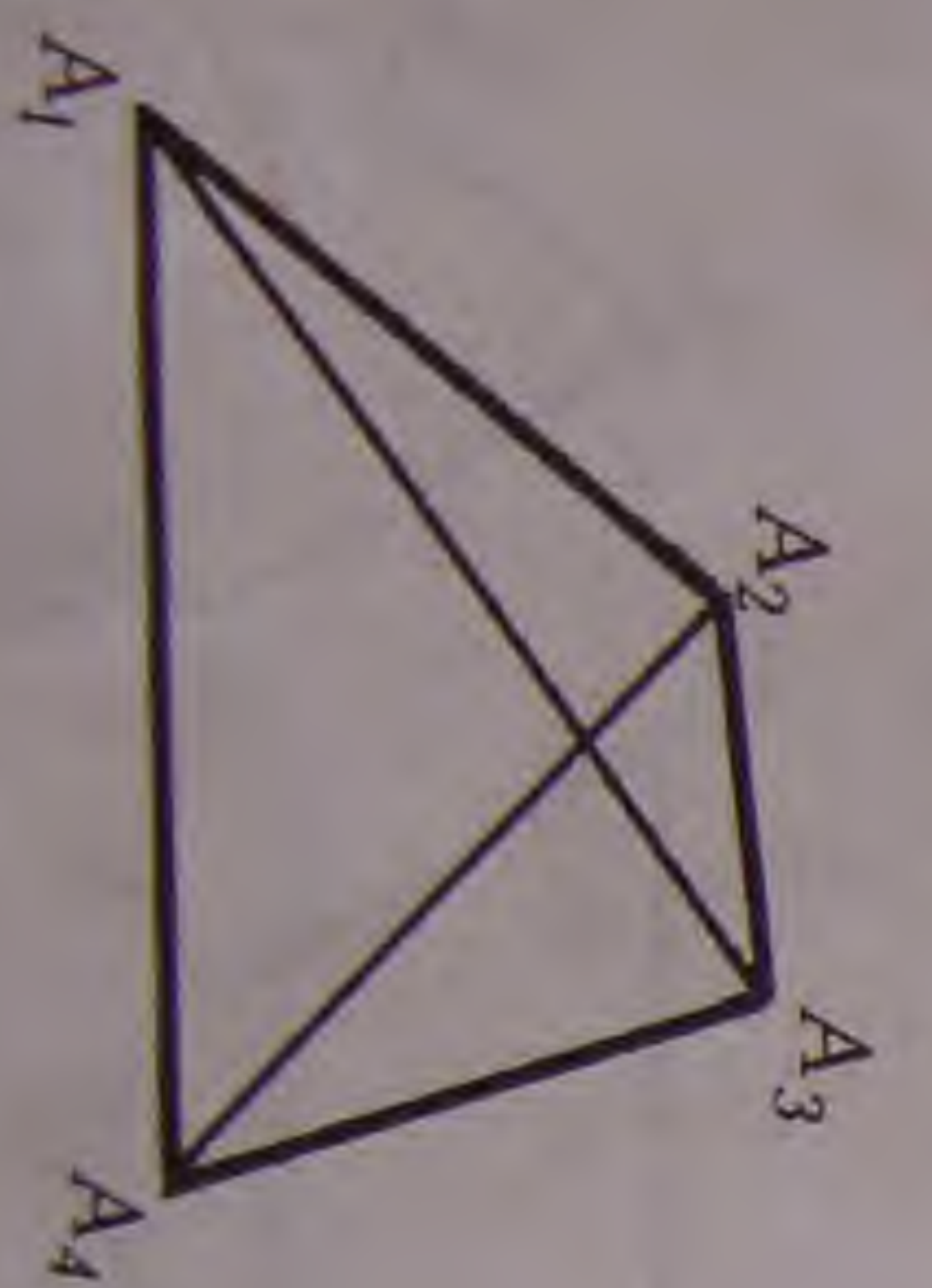
Յուրաքանչյուր բազմանկյուն հարթությունը տրոհում է երկու մասի, որոնցից մեկը կոչվում է բազմանկյան *ենդրքին տիրույթ*, իսկ մյուսը՝ *արտաքին տիրույթ*: Նկար 4-ում բազմանկյունների ենդրքին տիրույթները ստվերագծված են: Բազմանկյան և նրա ենդրքին տիրույթի միավորում հանդիսացող պատկերը ևս անկանկուն է բազմանկյուն:

**2 Ուռուցիկ բազմանկյուն:** Բազմանկյունը կոչվում է ուռուցիկ, եթե այն ընկած է իր ցանկացած երկու հարևան գագաթներով անցնող ուղիղներից յուրաքանչյուրի մի կողմում: Նկար 5-ում պատկերված  $F_1$  բազմանկյունը ուռուցիկ է, իսկ  $F_2$  բազմանկյունը ուռուցիկ չէ:

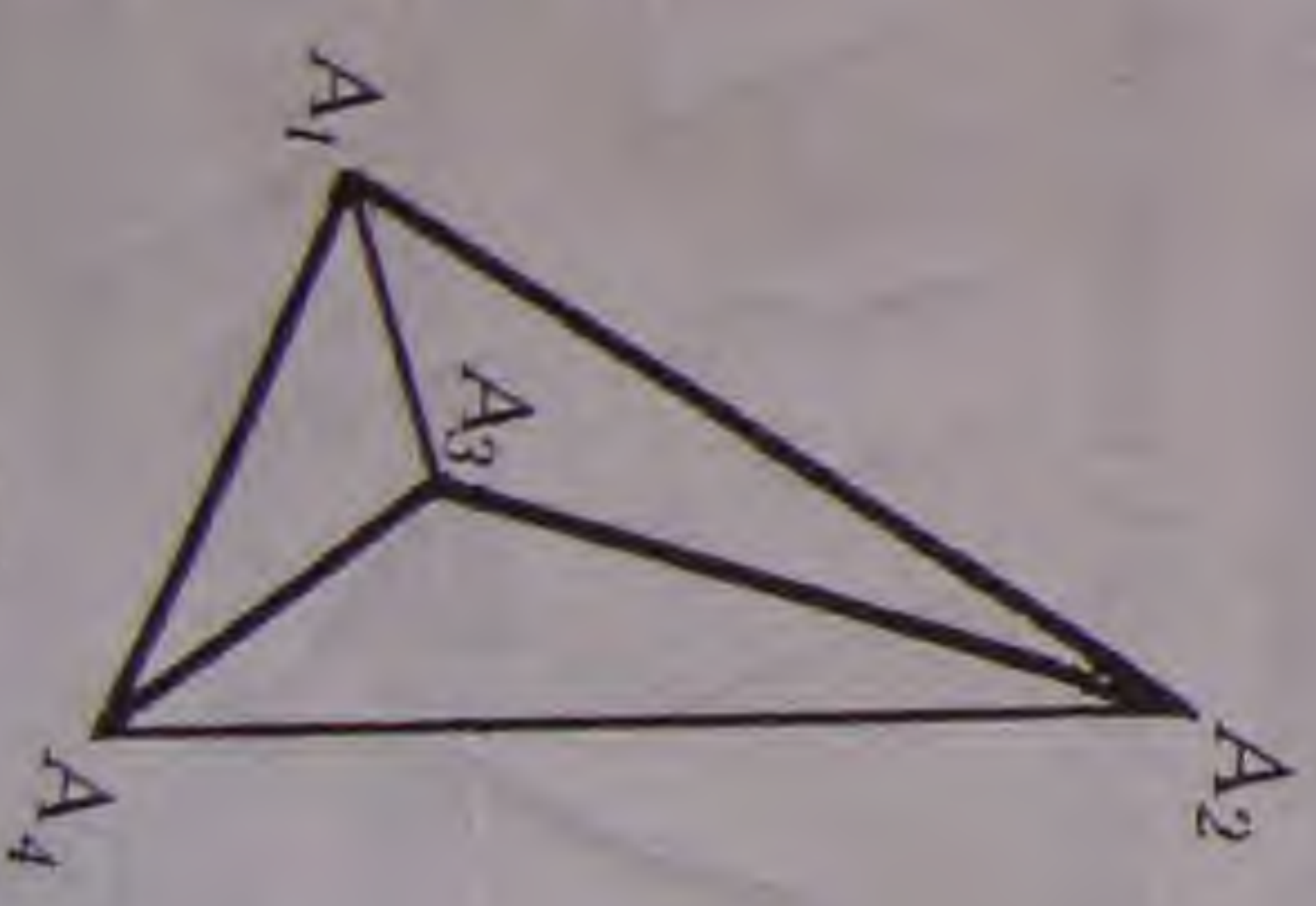
դիտենք 6,ա նկարում պատկերված ուռուցիկ  $n$ -անկյունը: Անկյուններ  $A_n A_1 A_2$ -ը,  $A_1 A_2 A_3$ -ը, ...,  $A_{n-1} A_n A_1$ -ը կոչվում են այդ բազմանկյան *անկյուններ*: Գտնենք դրանց գումարը: Դրա համար  $A_1$



Նկ. 5



ա)



բ)

Նկ. 6

Նկ. 7



գազաթը անկյունագծերով միացնենք մյուս գազաթերին: Արդյունքում ստացվում են  $n-2$  հատ եռանկյուններ (նկ. 6,բ): Այդ եռանկյունների անկյունների գումարը հավասար է  $n$ -անկյուն բազմանկյան անկյունների գումարին: Փիտեմբ, որ յուրաքանչյուր եռանկյան անկյունների գումարը  $180^\circ$  է, ուստի՝  $A_1A_2A_3\dots A_n$  բազմանկյան անկյունների գումարը, այն է՝  $n-2$  եռանկյունների անկյունների գումարը, հավասար է  $(n-2) \cdot 180^\circ$ :

Այսպիսով՝ ուռուցիկ  $n$ -անկյան անկյունների գումարը  $(n-2) \cdot 180^\circ$  է:

**3 Քառանկյուն:** Յուրաքանչյուր քառանկյուն ունի չորս գազաթ, չորս անկյուն, չորս կողմ և երկու անկյունագիծ (նկ. 7): Քառանկյան երկու ոչ կից կողմերը կոչվում են *հանդիպակաց*: Հանդիպակաց են կոչվում քառանկյան մեկ երկու ոչ հարևան գազաթերը (մեկնապես մեկ անկյունները):

Քառանկյունները լինում են ուռուցիկ և ոչ ուռուցիկ: 7,ա նկարում պատկերվածը ուռուցիկ քառանկյուն է, իսկ 7,բ նկարում պատկերվածը՝ ոչ ուռուցիկ:

Ուռուցիկ քառանկյան յուրաքանչյուր անկյունագիծ քառանկյունը տրոհում է երկու եռանկյան: Ոչ ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերից մեկը ևս տրոհում է քառանկյունը երկու եռանկյան (տե՛ս  $A_1A_3$  անկյունագիծը նկ. 7,բ):

Քանի որ ուռուցիկ  $n$ -անկյան անկյունների գումարը որոշվում է  $(n-2) \cdot 180^\circ$  արտահայտությամբ, ուրեմն՝ ուռուցիկ քառանկյան անկյունների գումարը  $360^\circ$  է: //

## Հարցեր և խնդիրներ

1. Գծագրեք ուռուցիկ հնգանկյուն և վեցանկյուն: Բազմանկյուններից յուրաքանչյուրում որևէ գազաթից տարեք բոլոր անկյունագծերը: Տարված անկյունագծերով քանի՞ եռանկյան է տրոհվում բազմանկյուններից յուրաքանչյուրը:
2. Գտեք անկյունների գումարը. ա) ուռուցիկ հնգանկյան, բ) ուռուցիկ վեցանկյան, գ) ուռուցիկ տասնանկյան:
3. Գտեք ուռուցիկ քառանկյան անկյունները, եթե դրանք իրար հավասար են:
4. Տրված է հավասար անկյուններով հնգանկյուն: Գտեք այդ անկյունները:



5. Քանի՞ կողմ ունի ուռուցիկ բազմանկյունը, եթե նրա անկյունների գումարը  $540^\circ$  է:

6. Գտեք ուռուցիկ թառանկյան անկյունները, եթե նրա երեք անկյունները իրար հավասար են, իսկ չորրորդ անկյունը դրանցից յուրաքանչյուրից փոքր է  $40^\circ$ -ով:

7. Գտեք ուռուցիկ թառանկյան անկյունները, եթե դրանցից մեկը մյուսներից մեծ է համապատասխանաբար  $10^\circ$ -ով,  $20^\circ$ -ով և  $30^\circ$ -ով:

8. Գտեք ուռուցիկ թառանկյան անկյունները, եթե դրանք համեմատական են 1, 2, 4, 5 թվերին:

9. Գտեք ուռուցիկ հնգանկյան անկյունները, եթե դրանք համեմատական են 2, 3, 4, 6, 12 թվերին:

10. Քանի՞ կողմ ունի ուռուցիկ բազմանկյունը, որի յուրաքանչյուր անկյունը հավասար է. **ա)**  $90^\circ$ , **բ)**  $60^\circ$ , **գ)**  $120^\circ$ , **դ)**  $108^\circ$ :

11. Գտեք թառանկյան կողմերը, եթե նրա պարագիծը 8սմ է, իսկ կողմերից մեկը մյուս կողմերից մեծ է համապատասխանաբար 3սմ-ով, 4սմ-ով և 5սմ-ով:

12. Գտեք թառանկյան կողմերը, եթե նրա պարագիծը 66սմ է, առաջին կողմը երկրորդից մեծ է 8սմ-ով և նույնքանով փոքր է երրորդից, իսկ չորրորդը՝ երեք անգամ մեծ է երկրորդից:

13. Գտեք  $ABCD$  ուռուցիկ թառանկյան  $A$ ,  $B$  և  $C$  անկյունները, եթե  $\angle A = \angle B = \angle C$  և  $\angle D = 135^\circ$ :

14.  $ABCD E$  ուռուցիկ հնգանկյան  $B$  գագաթով տարված անկյունագծերը հավասար են: Հայտնի է, որ  $\angle ABE = \angle CBD$  և  $\angle BEA = \angle BDC$ : Ապացուցեք, որ  $ABDE$  և  $BE DC$  թառանկյունների պարագծերը հավասար են:

## § 2

### ՋՈՒԳԱՅԵՌԱԳԻԾ

#### 4 Ջուգահեռագիծ:

Մահմանով: *Ջուգահեռագիծ կոչվում է այն թառանկյունը, որի հանդիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ զուգահեռ են*՝  
Եկար 8-ում պատկերված է  $ABCD$  յուգահեռագիծը.  $AB \parallel CD$ ,  $AD \parallel BC$ : Ջուգահեռագիծը ուռուցիկ թառանկյուն է (տե՛ս խնդիր 28-ը):

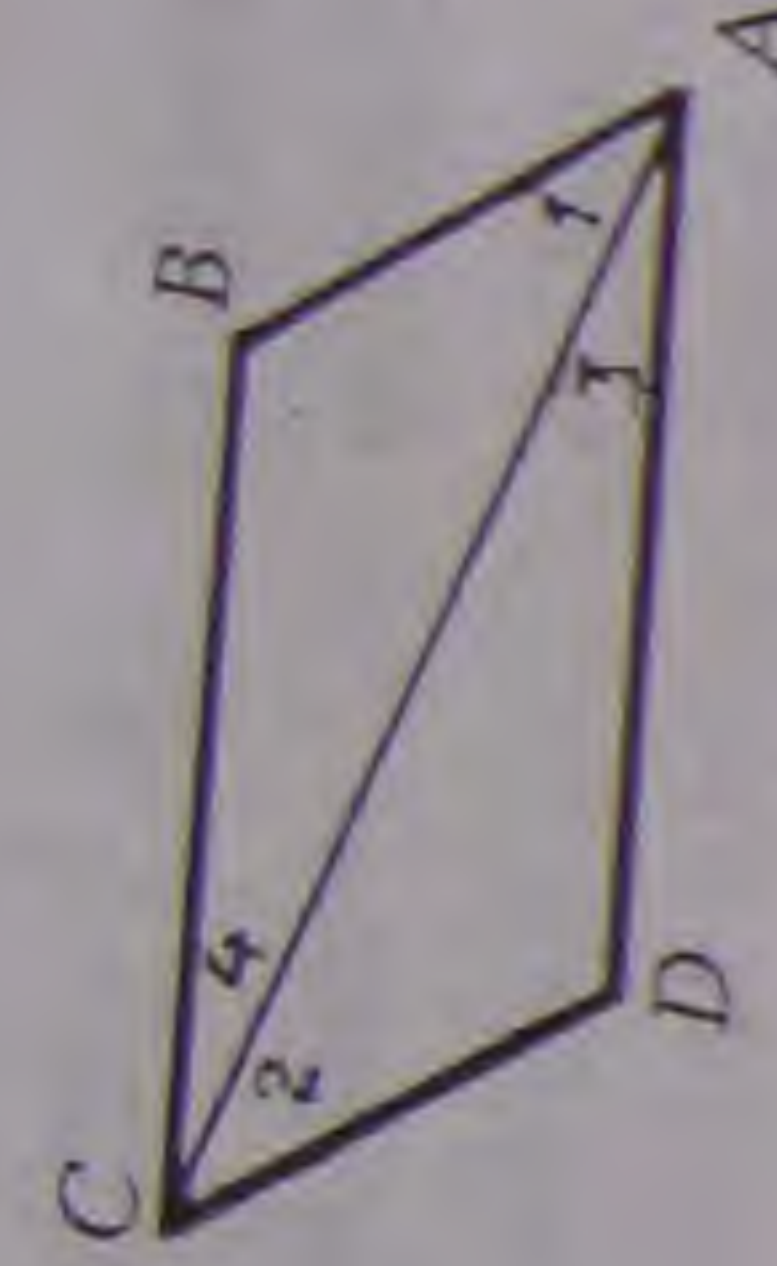
Ուսումնասիրենք յուգահեռագծի մի թանի հատկություն:

1<sup>4</sup> Ջուգահեռագծի հանդիպակաց կողմերը հավասար են, և հանդիպակաց անկյունները հավասար են:

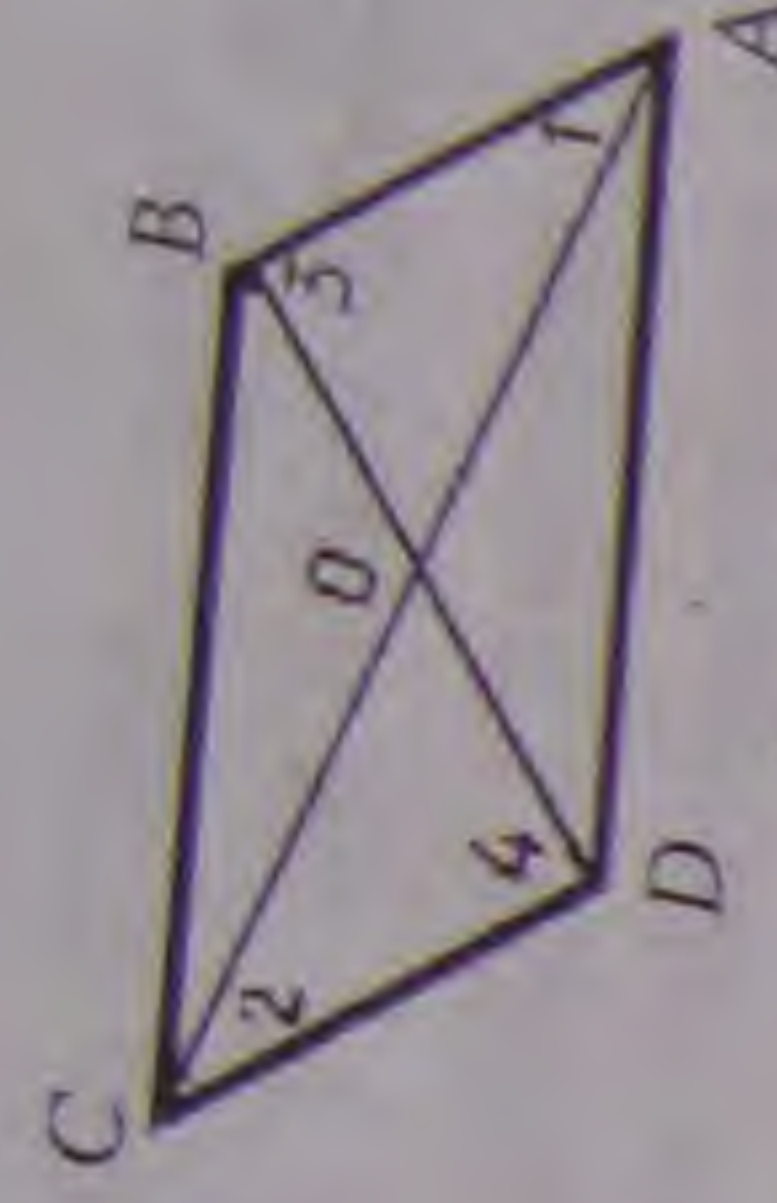




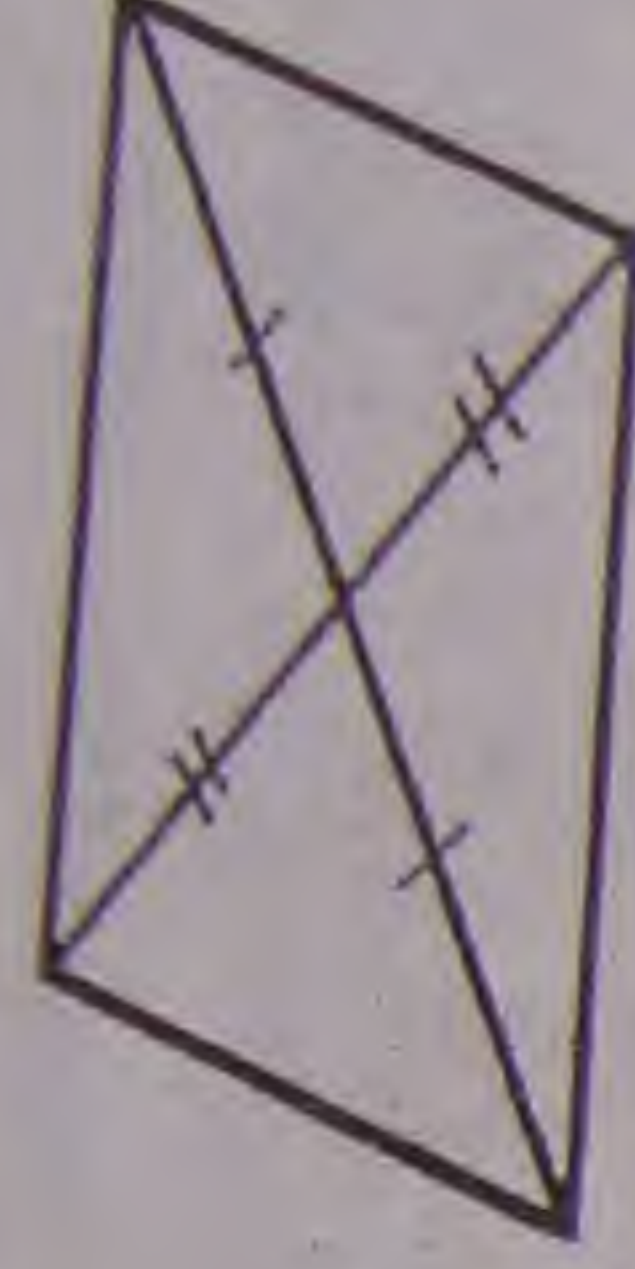
Նկ. 8



Նկ. 9



Նկ. 10



Ձուգահեռագծի հատկությունները

Նկ. 11

Դիտարկենք  $ABCD$  զուգահեռագիծը (նկ. 9):  $AC$  անկյունագծով այն տրոհվում է երկու՝  $ABC$  և  $ADC$  եռանկյունների: Այդ եռանկյունների մեջ  $AC$  կողմը ընդհանուր է,  $\angle 1 = \angle 2$  և  $\angle 3 = \angle 4$ , որպես խաչադիր անկյուններ, որոնք առաջանում են, համապատասխանաբար,  $AB$  և  $CD$ ,  $BC$  և  $AD$  զուգահեռ ուղիղները  $AC$  հատողով հատելիս: Ուրեմն՝  $ABC$  և  $ADC$  եռանկյունները հավասար են: Ուստի՝  $AB = CD$ ,  $AD = BC$  և  $\angle B = \angle D$ : Այնուհետև, օգտվելով անկյուններ 1-ի և 2-ի, 3-ի և 4-ի հավասարությունից, ստանում ենք.  $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$ :

2<sup>o</sup>. Ձուգահեռագծի անկյունագծերը հատման կետով կիսվում են:

Դիցուք՝  $ABCD$  զուգահեռագծի  $AC$  և  $BD$  անկյունագծերի հատման կետը  $O$ -ն է (նկ. 10):  $AOB$  և  $COD$  եռանկյունները հավասար են՝ ըստ կողմի և նրան առընթեր անկյունների ( $AB = CD$ )՝ որպես զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմեր,  $\angle 1 = \angle 2$  և  $\angle 3 = \angle 4$ , որպես խաչադիր անկյուններ, որոնք առաջանում են  $AB$  և  $CD$  զուգահեռ ուղիղները համապատասխանաբար  $AC$  և  $BD$  հատողներով հատելիս): Ուրեմն՝  $AO = OC$  և  $OB = OD$ , ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Ձուգահեռագծի բոլոր քննարկված հատկությունները լուսաբանված են նկար 11-ում:

**5 Ձուգահեռագծի հայտանիշները:** Դիտարկենք զուգահեռագծի երեք հայտանիշները:

1<sup>o</sup>. Եթե քառանկյան երկու կողմերը հավասար են և զուգահեռ, ապա այդ քառանկյունը զուգահեռագիծ է:



Դիցուք՝  $ABCD$  քառանկյան  $AB$  և  $CD$  կողմերը զուգահեռ են և  $AB=CD$  (տե՛ս նկ. 9): Տանենք  $AC$  անկյունագիծը, որը զուգահեռագիծը տրոհում է երկու  $ABC$  և  $CDA$  եռանկյունների: Այդ եռանկյունները հավասար են՝ ըստ երկու կողմի և նրանցով կազմված անկյան ( $AC$ -ն ընդհանուր կողմ է,  $AB=CD$ ) ըստ պայմանի,  $\angle 1=\angle 2$ ՝ որպես խաչադիր անկյուններ, որոնք առաջանում են  $AB$  և  $CD$  զուգահեռ ուղիղները  $AC$  հատողով հատելիս): Յեռևաբար՝  $\angle 3=\angle 4$ : Բայց անուղիղները  $AC$  հատողով հատելիս: Դրանից հետևում է, որ  $AD\parallel BC$ : Այսպիսով՝  $ABCD$  քառանկյան հանդիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ զուգահեռ են: Ըստ սահմանման՝ այդ քառանկյունը՝  $ABCD$ -ն, զուգահեռագիծ է:

2<sup>o</sup>. *Եթե քառանկյան հանդիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ հավասար են, ապա այդ քառանկյունը զուգահեռագիծ է:*

Տկյալ  $ABCD$  քառանկյան մեջ տանենք  $AC$  անկյունագիծը: Քառանկյունը տրոհվում է երկու  $ABC$  և  $CDA$  եռանկյունների (տե՛ս նկ. 9): Այդ եռանկյունները, ըստ երեք կողմի, հավասար են ( $AC$ -ն ընդհանուր կողմ է, իսկ ըստ պայմանի՝  $AB=CD$  և  $BC=DA$ ): Ուրեմն՝  $\angle 1=\angle 2$ : Այստեղից հետևում է, որ  $AB\parallel CD$ : Ստացվեց, որ  $AB=CD$  և  $AB\parallel CD$ , ուստի, ըստ զուգահեռագծի 1-ին հայտանիշի,  $ABCD$  քառանկյունը զուգահեռագիծ է:

3<sup>o</sup>. *Եթե քառանկյան անկյունագծերը հատվում և հատման կետով կիսվում են, ապա այդ քառանկյունը զուգահեռագիծ է:*

Դիտարկենք  $ABCD$  քառանկյունը, որում  $AC$  և  $BD$  անկյունագծերը  $O$  կետում հատվում և այդ կետով կիսվում են (տե՛ս նկ. 10):  $AOB$  և  $COD$  եռանկյունները հավասար են՝ ըստ եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշի ( $AO=OC$ ,  $BO=OD$ ) ըստ պայմանի,  $\angle AOB=\angle COD$ ՝ որպես հակադիր անկյուններ): Ուստի՝  $AB=CD$  և  $\angle 1=\angle 2$ :

Անկյուններ 1-ի և 2-ի հավասարությունից հետևում է, որ  $AB\parallel CD$ : Այսպիսով՝  $ABCD$  քառանկյան  $AB$  և  $CD$  հանդիպակաց կողմերը հավասար են և զուգահեռ: Ուրեմն, ըստ 1-ին հայտանիշի,  $ABCD$  քառանկյունը զուգահեռագիծ է:



## Խնդիրներ

15. Ապացուցեք, որ  $ABCD$  ուռուցիկ քառանկյունը զուգահեռագիծ է, եթե **ա)**  $\angle BAC = \angle ACD$  և  $\angle BCA = \angle DAC$ , **բ)**  $AB \parallel CD$ ,  $\angle A = \angle C$ :
16. Զուգահեռագծի պարագիծը 48սմ է: Գտեք զուգահեռագծի կողմերը, եթե. **ա)** կողմերից մեկը մյուսից մեծ է 3սմ-ով, **բ)** երկու կողմի տարբերությունը 7սմ է, **գ)** կողմերից մեկը երկու անգամ մեծ է մյուսից:
17.  $ABCD$  զուգահեռագծի պարագիծը 50սմ է,  $\angle C = 30^\circ$ , իսկ  $CD$  ուղղին տարված  $BH$  ուղղահայացը 6,5սմ է: Գտեք զուգահեռագծի կողմերը:
18. Զուգահեռագծի անկյուններից մեկը  $40^\circ$  է: Գտեք մնացած անկյունները:
19.  $ABCD$  քառանկյան մեջ  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ ,  $O$ -ն անկյունագծերի հատման կետն է:  $AOD$  եռանկյան պարագիծը 25սմ է,  $AC = 16$ սմ,  $BD = 14$ սմ: Գտեք  $BC$  կողմը:
20.  $ABCD$  քառանկյան մեջ  $AB = CD$  և  $AB \parallel CD$ ,  $\angle CBD = 15^\circ$ : Գտեք  $\angle BDA$ -ն:
21.  $ABCD$  ուռուցիկ քառանկյան մեջ  $AB = CD$ ,  $\angle B = 70^\circ$ ,  $\angle BCA = 60^\circ$ ,  $\angle ACD = 50^\circ$ : Ապացուցեք, որ  $BC = AD$ :
22. Զուգահեռագծի անկյունագիծը երկու կից կողմերի հետ կազմում է համապատասխանաբար,  $25^\circ$ -ի և  $35^\circ$ -ի անկյուններ: Գտեք զուգահեռագծի անկյունները:
23. Գտեք զուգահեռագծի անկյունները, եթե դրանցից երկուսի գումարը  $100^\circ$  է:
24.  $ABCD$  զուգահեռագծի  $A$  անկյան կիսորդը  $K$  կետում հատում է  $BC$  կողմը: Գտեք այդ զուգահեռագծի պարագիծը, եթե  $BK = 15$ սմ,  $KC = 9$ սմ:
25. Զուգահեռագծի կողմը անկյուններից մեկի կիսորդի հետ հատման կետով տրոհվում է 7սմ և 14սմ երկարությամբ հատվածների: Գտեք այդ զուգահեռագծի պարագիծը:
26. Գտեք  $ABCD$  զուգահեռագծի անկյունները, եթե. **ա)**  $\angle A = 84^\circ$ , **բ)**  $\angle A - \angle B = 55^\circ$ , **գ)**  $\angle A + \angle C = 142^\circ$ , **դ)**  $\angle A = 2\angle B$ , **ե)**  $\angle CAD = 16^\circ$ ,  $\angle ACD = 37^\circ$ :
27.  $MNPQ$  զուգահեռագծի մեջ տարված է  $MQ$  ուղղին ուղղահայաց  $NH$ -ը, ընդ որում  $H$  կետը գտնվում է  $MQ$  կողմի վրա: Գտեք զուգահեռագծի կողմերը և անկյունները, եթե հայտնի է, որ  $MH = 3$ սմ,  $HQ = 5$ սմ,  $\angle MNH = 30^\circ$ :







են և նկ. 8)  
հարևան  
կողմում:  
ուրա  $CD$   
ում է  $CD$   
ում  $BC$   
ում: Այս-  
ումում:

է: Այդ  
ուղղին  
բառան-

ված են  
վես, որ  
 $CD$ -ն և

վետում:  
 $OA, OB,$   
...

վետերը  
առան-

մետերը

ար նախ

մի  $M$   
դ: Այդ  
 $N=NC$ :

նք  $AB$   
յ կետը  
պակաց

կողմերը գույգ առ գույգ զուգահեռ են, այսինքն՝  $MBCD$ -ն զուգահեռագիծ է: Քանի որ, ըստ պայմանի,  $AM=MB$ , իսկ  $MB=CD$  (որպես զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմեր), ապա  $AM=CD$ : Ստացվում է, որ  $AMN$  և  $NCD$  եռանկյունները հավասար են՝ ըստ կողմի և նրան առընթեր անկյունների ( $\angle 1=\angle 2$  և  $\angle 3=\angle 4$ , որպես խաչադիր անկյուններ, որոնք առաջանում են  $AB$  և  $CD$  զուգահեռ ուղիղները համապատասխանաբար  $AC$  և  $MD$  հատողներով հատելիս): Այստեղից հետևում է, որ  $AN=NC$ , ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Այժմ քննության առնենք ստացված  $MN$  հատվածը: Նախ պարզ է, որ  $MN$ -ը հանընկնում է  $ABC$  եռանկյան միջին գծի հետ ( $M$ -ը և  $N$ -ը համապատասխանաբար  $AB$  և  $AC$  կողմերի միջնակետերն են): Քանի որ  $MN$ -ը գտնվում է  $BC$ -ին զուգահեռ  $MD$  ուղղի վրա, ապա  $MN \parallel BC$ : Միաժամանակ՝ ունենք, որ  $\triangle AMN = \triangle NCD$ , ուստի  $MN=ND$ : Այսինքն՝  $MN = \frac{1}{2} MD$ : Բայց, որովհետև  $MD=BC$  (որպես զուգահեռագծի

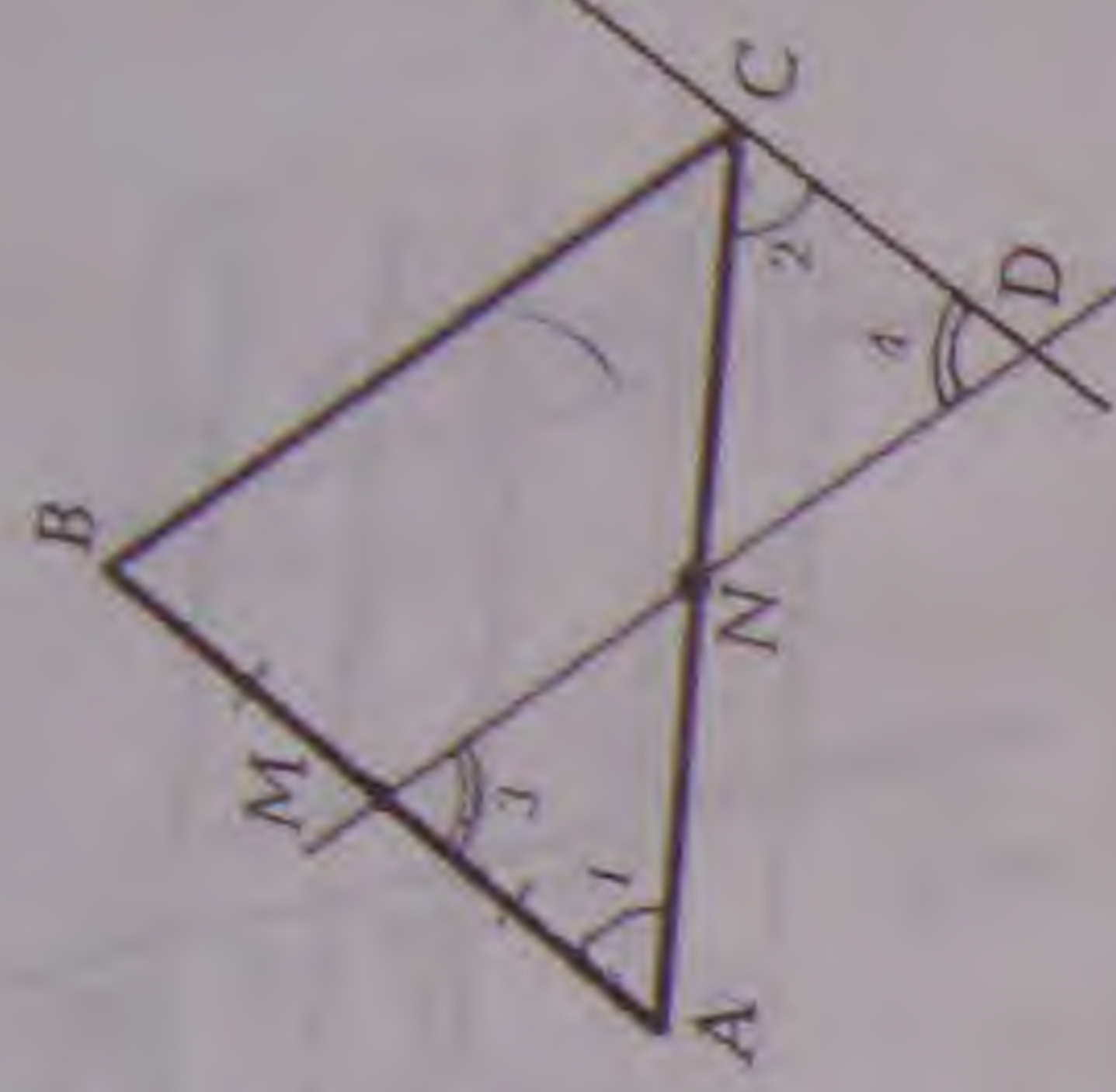
հանդիպակաց կողմեր), ուրեմն՝  $MN = \frac{1}{2} BC$ :

Ստացվեց, որ  $ABC$  եռանկյան  $MN$  միջին գիծը զուգահեռ է  $BC$  կողմին և հավասար է նրա կեսին: Նույնը կարելի է ասել ցանկացած եռանկյան յուրաքանչյուր միջին գծի մասին:

Այսպիսով՝ եռանկյան միջին գիծը զուգահեռ է նրա կողմերից մեկին և հավասար է այդ կողմի կեսին:

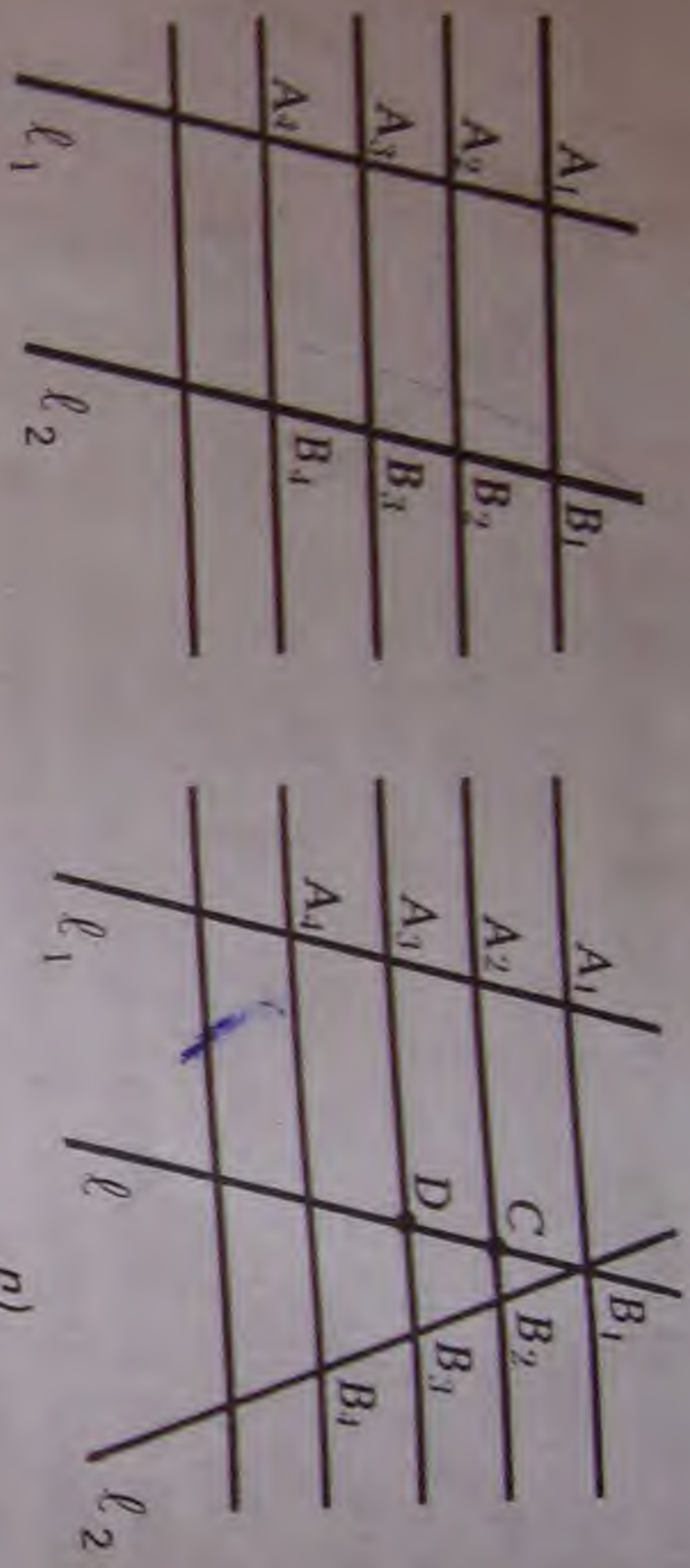
**7 Թալեսի թեորեմը:** Այժմ ապացուցենք մի թեորեմ, որը վերաբերում է հատվածը հավասար մասերի բաժանման խնդրին, և կոչվում է հին հույն գիտնական Թալեսի անունով (Թալես Միլեթացի, մ.թ.ա. մոտ 625-547թթ.):

Թեորեմ: Եթե երկու ուղիղներից մեկի վրա հաջորդաբար տեղադրվեն մի քանի հավասար հատվածներ և նրանց ծայրակետերով տարվեն երկրորդ ուղիղը հատող զուգահեռ ուղիղներ,



Նկ. 12





Նկ. 13

ապա դրանք նդիտորդ ուղղի վրա անջատում են միմյանց հակասար հատվածներ:

Ապացուցում: Պիցուք  $l_1$  ուղղի վրա տեղադրված են  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$  հակասար հատվածները և նրանց ծայրակետերով, այն է՝  $A_1, A_2, A_3, \dots$  կետերով տարված են զուգահեռ ուղիղներ, որոնք  $l_2$  ուղիղը հատում են  $B_1, B_2, B_3, \dots$  կետերում (Նկ. 13): Պահանջվում է ապացուցել, որ  $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, \dots$  հատվածները միմյանց հակասար են: Ապացուցենք, օրինակ,  $B_1B_2=B_2B_3$ :

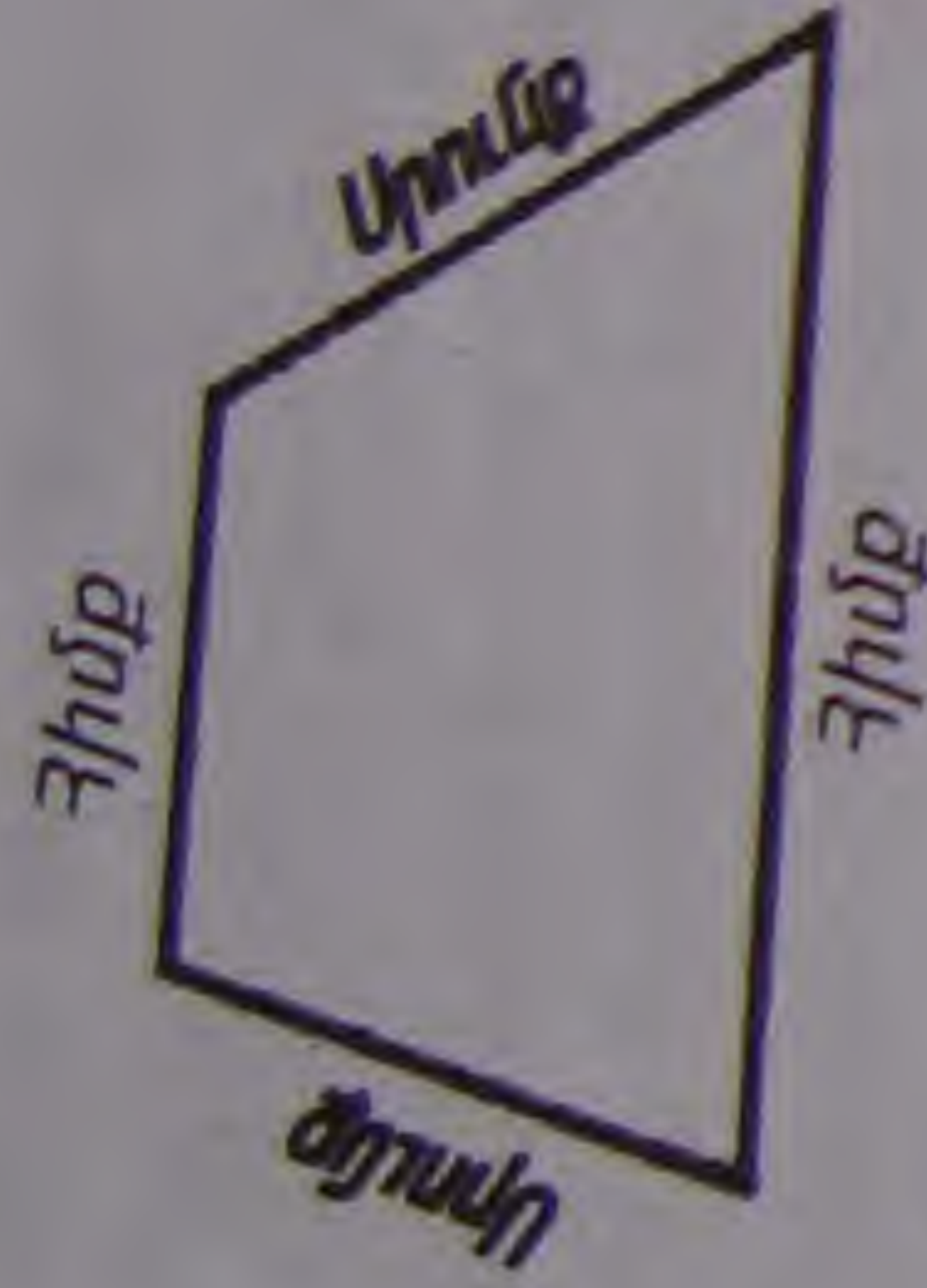
Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ  $l_1$  և  $l_2$  ուղիղները զուգահեռ են (Նկ. 13,ա): Այս դեպքում ստացված  $A_1B_1B_2A_2$  և  $A_2B_2B_3A_3$  պատկերները զուգահեռագծեր են, քանի որ նրանց հանդիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ զուգահեռ են: Հետևաբար՝  $A_1A_2=B_1B_2$  և  $A_2A_3=B_2B_3$ : Բայց, քանի որ  $A_1A_2=A_2A_3$ , ուրեմն՝  $B_1B_2=B_2B_3$ :

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ  $l_1$  և  $l_2$  ուղիղները զուգահեռ չեն:  $B_1$  կետով տանենք  $l_1$  ուղղին զուգահեռ  $l$  ուղիղը (Նկ. 13,բ): Այն հատում է  $A_2B_2$  և  $A_3B_3$  ուղիղները ինչ որ  $C$  և  $D$  կետերում: Քանի որ  $A_1A_2=A_2A_3$ , ապա, ըստ նախորդ դեպքի ապացույցի,  $B_1C=CD$ : Այժմ դիտենք  $B_1DB_3$  եռանկյունը, որի մեջ  $B_1C=CD$  և  $CB_2 \parallel DB_3$ : Պահանջ հետևում է, որ  $B_1B_2=B_2B_3$  (տե՛ս 6-րդ կետը): Նույն ձևով ապացուցվում են, որ  $B_2B_3=B_3B_4$ , և այլն:

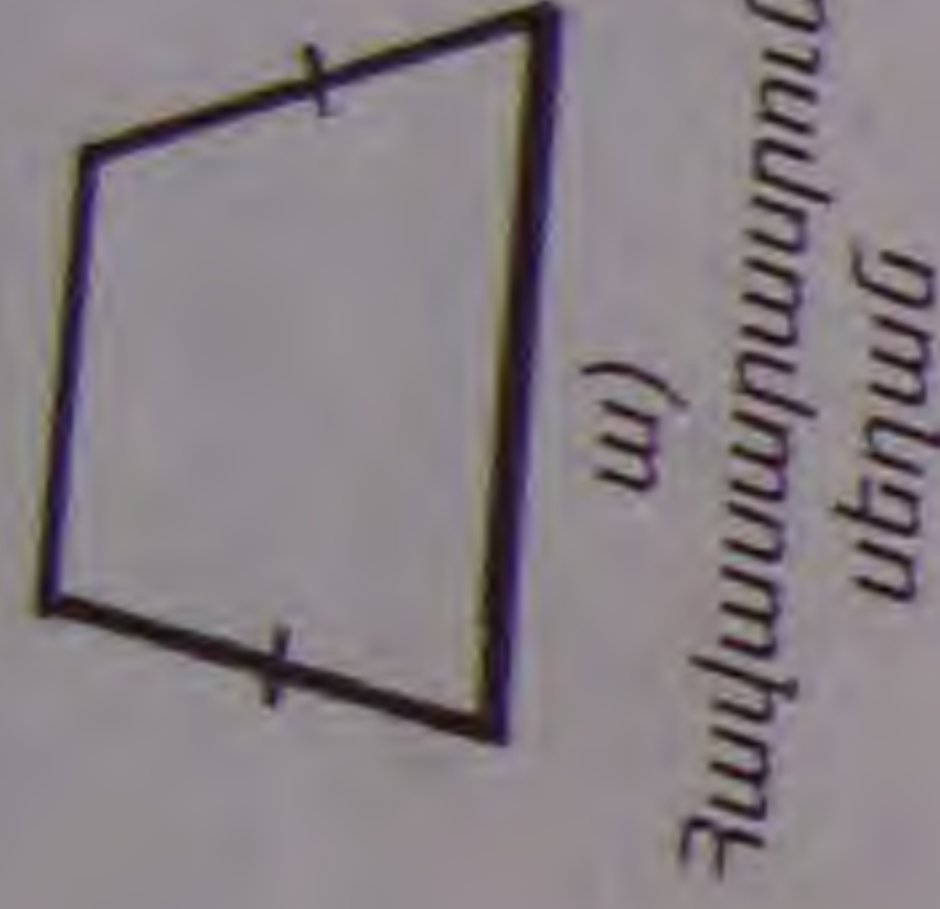
Թեորեմն ապացուցված է:

Այժմ դիտարկենք մի քառանկյուն, որի ուսումնասիրության մեջ կարևոր դեր ունեն այս և նախորդ կետերում նշված փաստերը:





Նկ. 14



ա) Դավասարասրուն սեղան



բ) Ուղղանկյուն սեղան

Նկ. 15

**Սեղան:** Սեղան կոչվում է այն քառանկյունը, որի երկու կողմերը զուգահեռ են, իսկ մյուս երկու կողմերը զուգահեռ չեն:

Զուգահեռ կողմերը կոչվում են սեղանի *հիմքեր*, իսկ երկու մյուս կողմերը՝ նրա *սրունքներ* (Նկ. 14):

Սեղանը կոչվում է *հավասարասրուն*, եթե նրա սրունքները հավասար են (Նկ. 15, ա): Սեղանը, որի որևէ անկյունը ուղիղ է, կոչվում է *ուղղանկյուն սեղան* (Նկ. 15, բ):

Սեղանի սրունքների միջնակետերը միացնող հատվածը կոչվում է սեղանի *միջին գիծ*:

**Թեորեմ:** Սեղանի միջին գիծը զուգահեռ է հիմքերին և հավասար է նրանց կիսագումարին:

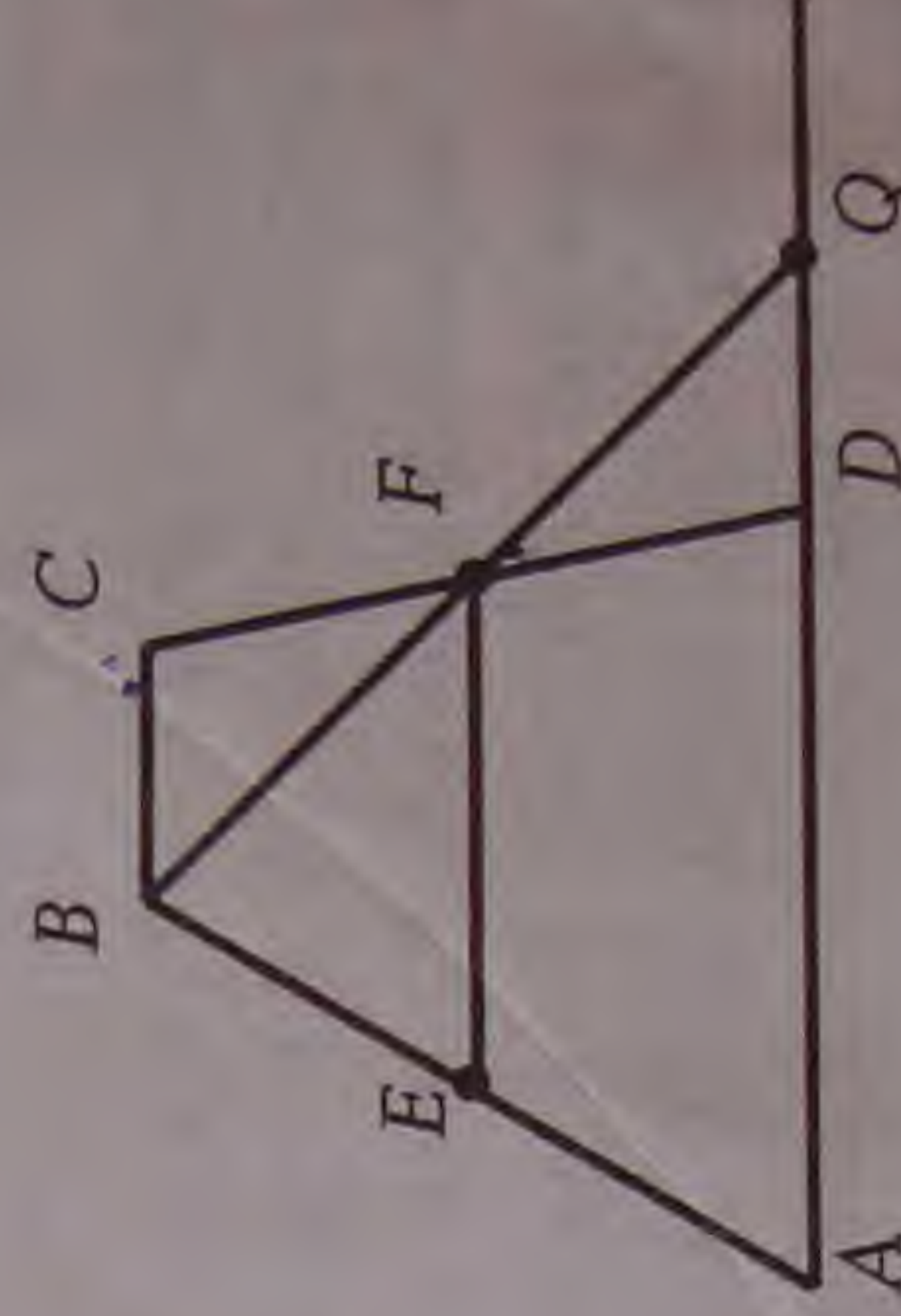
Ապացուցում: Դիցուք  $ABCD$ -ն տրված սեղան է, որի հիմքերն են  $BC$ -ն և  $AD$ -ն (Նկ. 16), իսկ  $EF$ -ը նրա միջին գիծն է, այսինքն՝  $AE=EB$  և  $DF=FC$ :

Պահանջվում է ապացուցել, որ

$$EF \parallel AD \parallel BC \text{ և } EF = \frac{1}{2}(BC + AD):$$

$B$  գագաթով և  $CD$  սրունքի  $F$

միջնակետով տանենք ուղիղ: Այն հատում է  $AD$  ուղիղը ինչ որ  $Q$  կետում:  $FBC$  և  $FQD$  եռանկյունները հավասար են՝ ըստ կողմի և նրան առընթեր երկու անկյան (ըստ պայմանի  $FC=FD$ ,  $\angle BFC = \angle QFD$ ՝ որպես հակադիր անկյուններ,  $\angle FCB = \angle FDQ$ ՝ որպես խաչադիր անկյուններ, որոնք առաջանում են  $BC$  և  $AD$  զուգահեռ ուղիղները  $CD$  հատողով հատելիս): Ուրեմն՝  $DQ=CB$ :



Նկ. 16



Այժմ դիտենք  $ABQ$  եռանկյունը:  $EF$ -ը նրա միջին գիծն է, ուստի  $EF \parallel AQ$  և  $EF = \frac{1}{2}AQ$ : Բայց  $AQ$  և  $AD$  ուղիղները համընկնում են, իսկ  $AQ = AD + DQ = AD + BC$ : Այստեղից հետևում է, որ  $EF \parallel AD \parallel BC$  և  $EF = \frac{1}{2}(BC + AD)$ : Թեորեմն ապացուցված է:



### Խնդիրներ

33. Եռանկյան կողմերը հավասար են 6սմ, 8սմ, 10սմ: Գտեք այն եռանկյան պարագիծը, որի կողմերը տրված եռանկյան միջին գծերն են:
34. Ապացուցեք, որ եռանկյան գագաթները հավասարահեռ են նրա որևէ միջին գիծն ընդգրկող ուղղից:
35. Ապացուցեք, որ ուռուցիկ քառանկյան կողմերի միջնակետերը զուգահեռագծի գագաթներ են:
36. Ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերը հավասար են 12սմ և 16սմ: Գտեք այն քառանկյան կողմերի միջնակետերն են:
37. Քառանկյան անկյունագծերը հավասար են  $m$ -ի և  $n$ -ի: Գտեք այն քառանկյան պարագիծը, որի գագաթները տրված քառանկյան կողմերի միջնակետերն են:
38. Գտեք  $AD$  և  $BC$  հիմքերով սեղանի  $B$  և  $D$  անկյունները, եթե  $\angle A = 36^\circ$ ,  $\angle C = 117^\circ$ :
39. Ապացուցեք, որ հավասարասրուն սեղանի յուրաքանչյուր հիմքին արդենթե անկյունները հավասար են:
40. Հավասարասրուն սեղանի մեծ հիմքը 4սմ է, սրունքը՝ 2սմ, իսկ դրանց կազմած անկյունը՝  $60^\circ$ : Գտեք սեղանի փոքր հիմքը:
41. Գտեք հավասարասրուն սեղանի անկյունները, եթե հայտնի է, որ սեղանի հանդիպակաց անկյունների տարբերությունը  $40^\circ$  է:
42. Սեղանի հիմքերը հարաբերում են, ինչպես 2:3, իսկ միջին գիծը 10սմ է: Գտեք սեղանի հիմքերը:
43.  $M$  և  $N$  կետերը գտնվում են տրված ուղղի մի կողմում, և նրանց հեռավորությունները այդ ուղղից հավասար են 10սմ և 22սմ: Գտեք  $MN$  հատվածի միջնակետի հեռավորությունը այդ ուղղից:
44. Հավասարասրուն սեղանի բութ անկյան գագաթից նրա մեծ հիմքին տարված ուղղահայացն այդ հիմքը տրոհում է 6սմ և 30սմ երկարությամբ հատվածների: Գտեք սեղանի փոքր հիմքը և միջին գիծը:
45. Սեղանի սրունքներից մեկը բաժանված է երեք հավասար հատվածների: Այդ բաժանման կետերից տարված են մյուս սրունքին միացնող հատվածներ, որոնք զուգահեռ են սեղանի հիմքերին:



Գտեք այդ հատվածների երկարությունները, եթե սեղանի հիմքերը հավասար են 2սմ և 5սմ:

46. Տրված ուղղի տարբեր կողմերում տրված են  $M$  և  $N$  կետերը, որոնց հեռավորությունները այդ ուղղից հավասար են 10սմ և 6սմ: Գտեք  $MN$  հատվածի միջնակետի հեռավորությունը տրված ուղղից:

47. Ապացուցեք, որ սեղանը հավասարասրուն է, եթե  $\alpha$ ) հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են,  $\beta$ ) եթե անկյունագծերը հավասար են:

48. Ապացուցեք, որ հավասարասրուն սեղանի տեսք ունեցող միատեսակ սալիկներով կարելի է լրիվությամբ ծածկել հարթության ցանկացած մասը:

49. Ուղղանկյուն սեղանի մեջ սուր անկյունը  $45^\circ$  է: Փոքր սրունքը և փոքր հիմքը 10-ական սմ են: Գտեք սեղանի մեծ հիմքը:

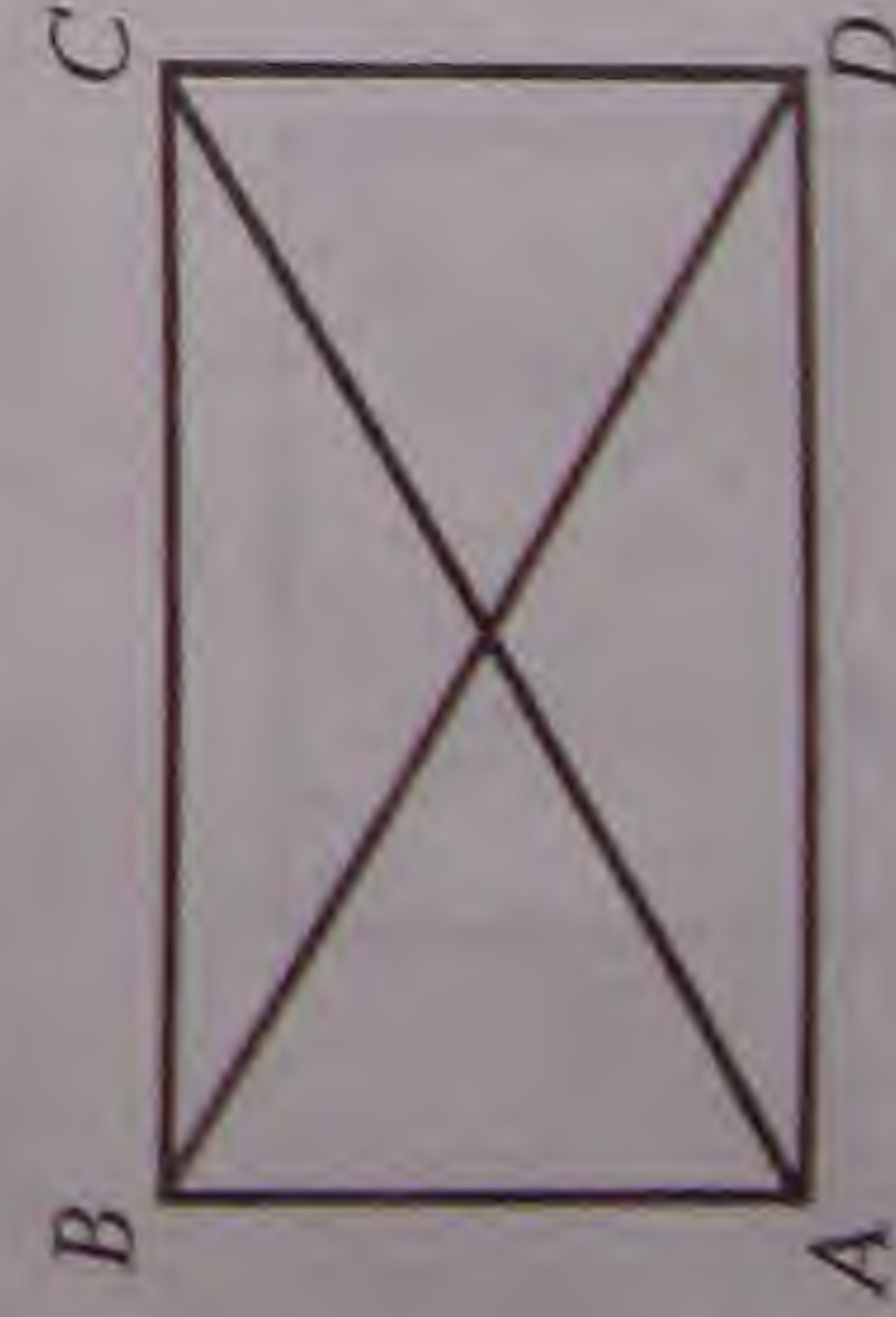
50. Ուղղանկյուն սեղանի հիմքերն են  $a$  և  $b$ , անկյուններից մեկը  $\alpha$ : Գտեք  $\alpha$ ) սեղանի մեծ սրունքը, եթե  $a=4$ սմ,  $b=7$ սմ,  $\alpha=60^\circ$ ,  $\beta$ ) սեղանի փոքր սրունքը, եթե  $a=10$ սմ,  $b=15$ սմ,  $\alpha=45^\circ$ :

## § 4 ՈՒՂԱՍՆԿՅՈՒՆ, ՇԵՂԱՍԿՅՈՒՆ, ԲԱՌԱԿՈՒՄԻ

9 Ուղղանկյուն: Ուղղանկյուն կոչվում է այն զուգահեռագիծը, որի բոլոր անկյուններն ուղիղ են: Նկատենք, որ ուղղանկյունը կարող է դիտվել որպես զուգահեռագիծ, այսինքն այն օժտված է զուգահեռագծին բնորոշ բոլոր հատկություններով: Դրանք են՝ ուղղանկյան հանդիպակաց կողմերը հավասար են, անկյունագծերը հատման կետով կիսվում են:

Ուսումնասիրենք ուղղանկյանը առանձնահատուկ հատկությունը:

Ուղղանկյան անկյունագծերը հավասար են:



Նկ. 17

Իսկապես, դիտենք նկար 17-ը, որում պատկերված  $ABCD$  ուղղանկյան անկյունագծերն են  $AC$ -ն և  $BD$ -ն:  $ACD$  և  $DBA$  ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են՝ ըստ երկու էջի ( $CD=BA$ ,  $AD$ -ն ընդհանուր էջ է): Դրանից հետևում է, որ  $AC$  և  $BD$  մերքնաձիգները հավասար են.  $AC=BD$ ,

ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Ապացուցենք հակադարձ պնդումը (ուղղանկյան հայտանիշը):

$$\begin{array}{r} 36 \\ 72 \overline{) 252} \\ \underline{252} \\ 0 \end{array}$$



Եթե զուգահեռագծի անկյունագծերը հավասար են, ապա այդ զուգահեռագիծը ուղղանկյուն է:

Դիցուք՝  $ABCD$  զուգահեռագծի  $AC$  և  $BD$  անկյունագծերը հավասար են (տե՛ս նկ. 17):  $ABD$  և  $DCA$  եռանկյունները հավասար են ըստ սար են (տե՛ս նկ. 17):  $ABD$  և  $DCA$  եռանկյունները հավասար են ըստ երեք կողմի ( $AB=DC$ ,  $BD=CA$ ,  $AD$ -ն ընդհանուր կողմ է): Դրանից հետևում է, որ  $\angle A=\angle D$ : Քանի որ զուգահեռագծի հանդիպակաց անկյունները հավասար են, ապա  $\angle A=\angle C$ ,  $\angle D=\angle B$ : Այսպիսով  $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$ : Զուգահեռագիծը ուռուցիկ թառանկյուն է և, ուրեմն,  $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$ : Հետևաբար՝  $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$ , այսինքն  $ABCD$ -ն ուղղանկյուն է:

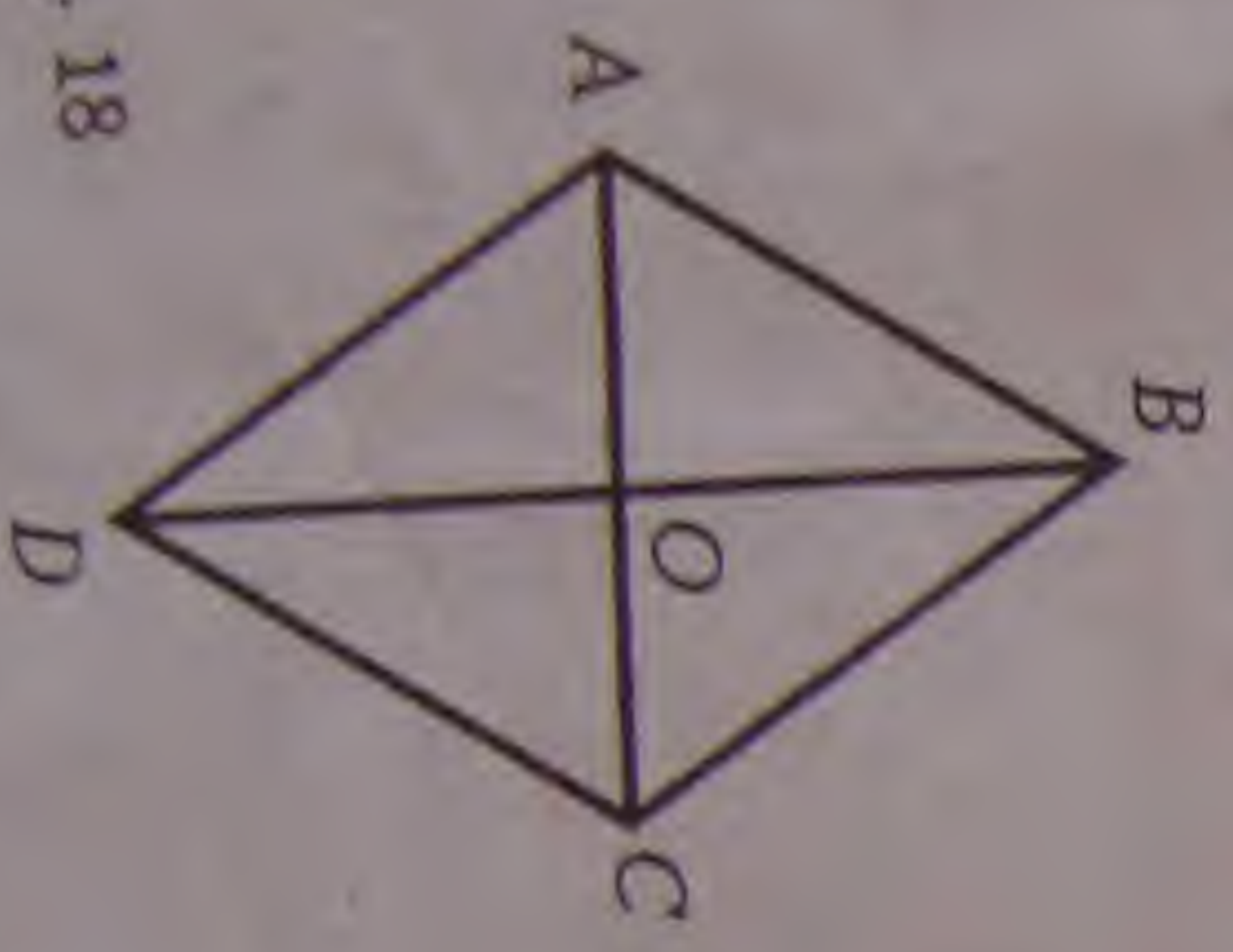
**10 Շեղանկյուն և թառակուսի:** Շեղանկյուն կոչվում է այն զուգահեռագիծը, որի բոլոր կողմերը հավասար են: Նկատենք, որ շեղանկյունը կարող է դիտվել որպես զուգահեռագիծ, այսինքն այն օժտված է զուգահեռագծին բնորոշ բոլոր հատկություններով: Ուսումնասիրենք շեղանկյանը առանձնահատուկ հատկությունը:

Շեղանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց են և կիսում են շեղանկյան անկյունները:

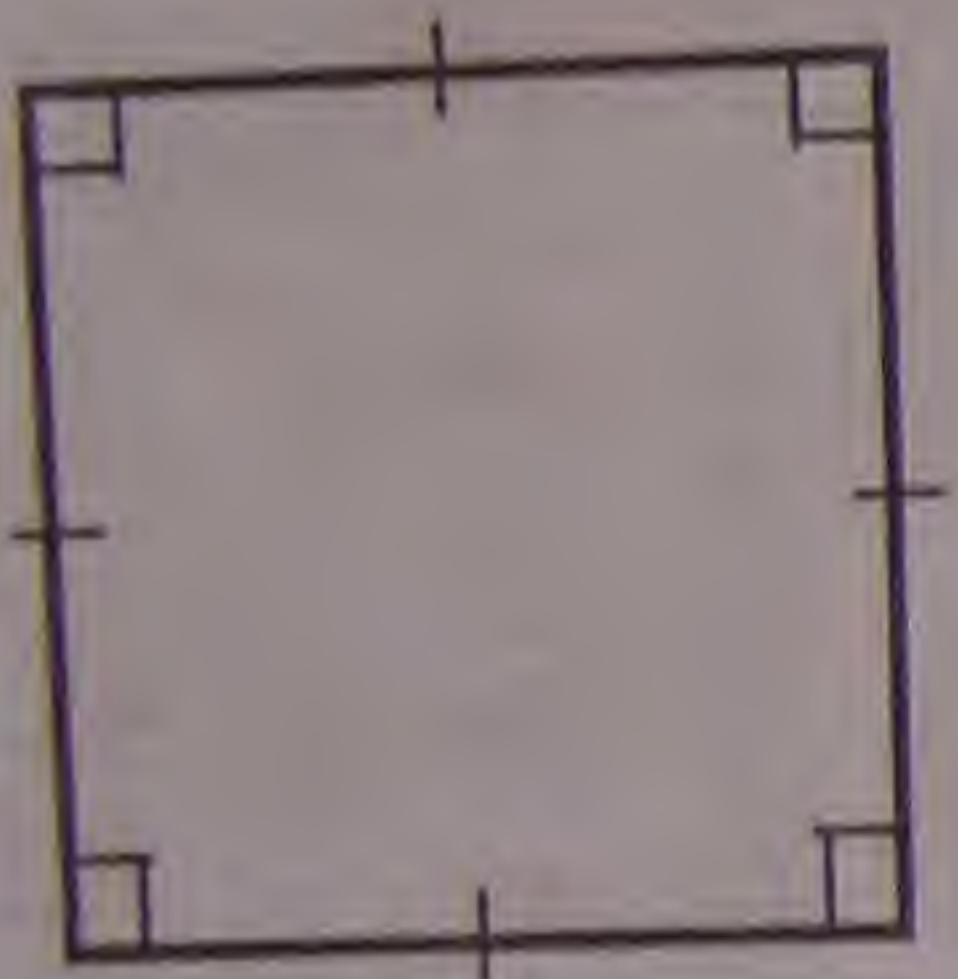
Դիտարկենք  $ABCD$  շեղանկյունը (նկ. 18): Պահանջվում է ապացուցել, որ  $AC \perp BD$ , և անկյունագծերից յուրաքանչյուրը շեղանկյան հանդիպակաց անկյունները կիսում է: Ապացուցենք, օրինակ, որ  $\angle BAC=\angle DAC$ :

Ըստ շեղանկյան սահմանման՝  $AB=AD$ , ուստի  $BAD$  եռանկյունը հավասարասրուն է: Քանի որ շեղանկյունը զուգահեռագիծ է, ապա նրա անկյունագծերը հատման  $O$  կետով կիսվում են: Հետևաբար՝  $AO$ -ն  $BAD$  հավասարասրուն եռանկյան միջնագիծ է և, ուրեմն, նաև կիսորդ է և բարձրություն: Այսինքն՝  $AC \perp BD$  և  $\angle BAC=\angle DAC$ , ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Նկ. 18



ա)



բ) թառակուսու հատկությունները

Նկ. 19





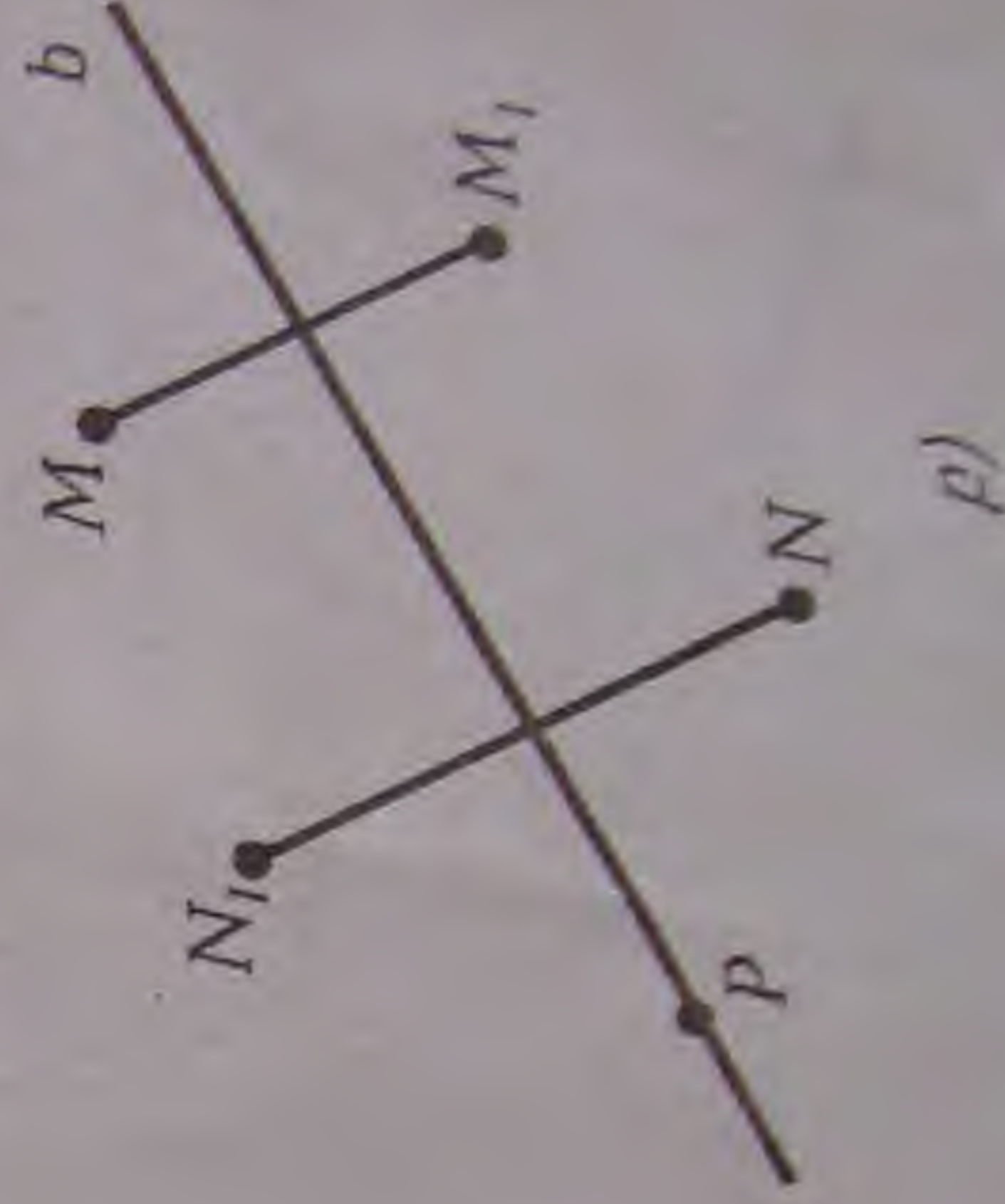
Քառակուսի կոչվում է այն ուղղանկյունը, որի բոլոր կողմերը հավասար են՝ քանի որ ուղղանկյունը զուգահեռագիծ է, ապա քառանկյունը հավասար են, այսինքն՝ նաև շեղանկյուն է: Դրանցից հետևում է, որ քառակուսին օժտված է ինչպես ուղղանկյան, այնպես էլ շեղանկյան կախությամբ: Չնայած քառակուսու հիմնական հատա-  
 քառակուսու բոլոր անկյունները ուղիղ են (նկ. 19,ա),  
 բ. քառակուսու անկյունագծերը հավասար են, փոխուղղահայաց  
 են, հատման կետով կիսվում են և քառակուսու անկյունները  
 կիսում են (նկ. 19,բ):

# 11 Առանցքային և կենտրոնային համաչափություններ:

Ա. Առանցքային համաչափություն: Երկու՝  $A$  և  $A_1$  կետերը կոչվում են  $a$  ուղղի նկատմամբ համաչափ, եթե  $a$  ուղիղն ուղղահայաց է  $AA_1$  հատվածին և անցնում է նրա միջնակետով (նկ. 20,ա): Համարվում է, որ  $a$  ուղղի յուրաքանչյուր կետը համաչափ է ինքը իրեն: Չհամարվում  $M$  և  $M_1$ ,  $N$  և  $N_1$  կետերը համաչափ են  $b$  ուղղի նկատմամբ, իսկ  $P$  կետը այդ ուղղի նկատմամբ համաչափ է ինքը իրեն:

Պատկերը կոչվում է  $a$  ուղղի նկատմամբ համաչափ, եթե այդ պատկերի յուրաքանչյուր կետի՝  $a$  ուղղի նկատմամբ համաչափ կետը ևս պատկանում է այդ պատկերին:  $a$  ուղիղը կոչվում է պատկերի համաչափության առանցք: Նաև ասում են, որ պատկերն օժտված է առանցքային համաչափությամբ:

Բերենք պատկերների օրինակներ, որոնք օժտված են առանցքային համաչափությամբ (նկ. 21): Չփոփած անկյունն ունի համաչափության մեկ առանցք. դա այն ուղիղն է, որն ընդգրկում է տվյալ անկյան



Նկ. 20





Քառակուսի կոչվում է այն ուղղանկյունը, որի բոլոր կողմերը հավասար են՝ քանի որ ուղղանկյունը զուգահեռագիծ է, ապա քառակուսին և զուգահեռագիծ է. այնպիսի զուգահեռագիծ, որի բոլոր կողմերը հավասար են, այսինքն՝ նաև շեղանկյուն է: Դրանցից հետևում է, որ քառակուսին օժտված է ինչպես ուղղանկյան, այնպես էլ շեղանկյան բոլոր հատկություններով: Ձևակերպենք քառակուսու հիմնական հատկությունները.

ա. քառակուսու բոլոր անկյունները ուղիղ են (նկ. 19, ա),

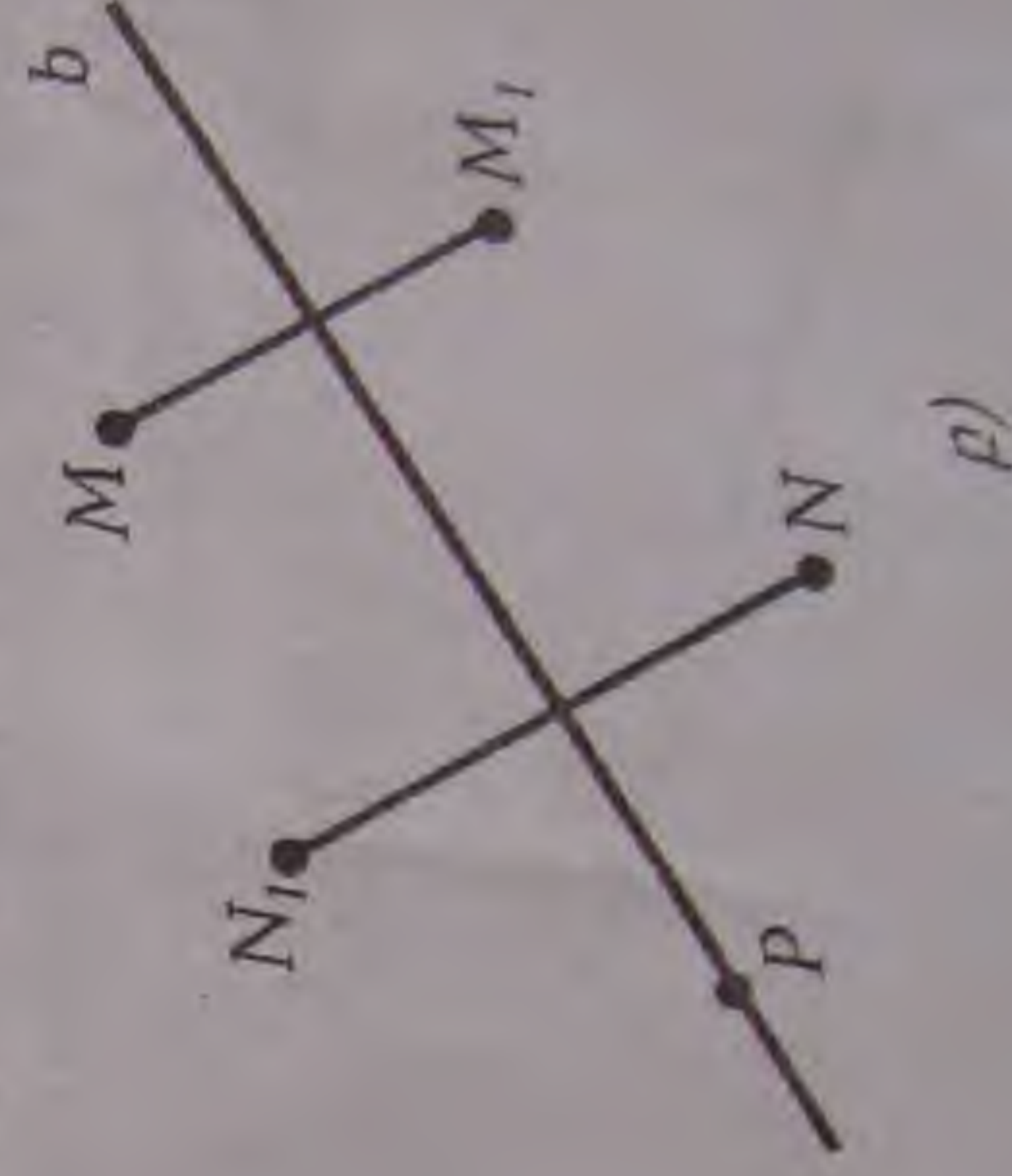
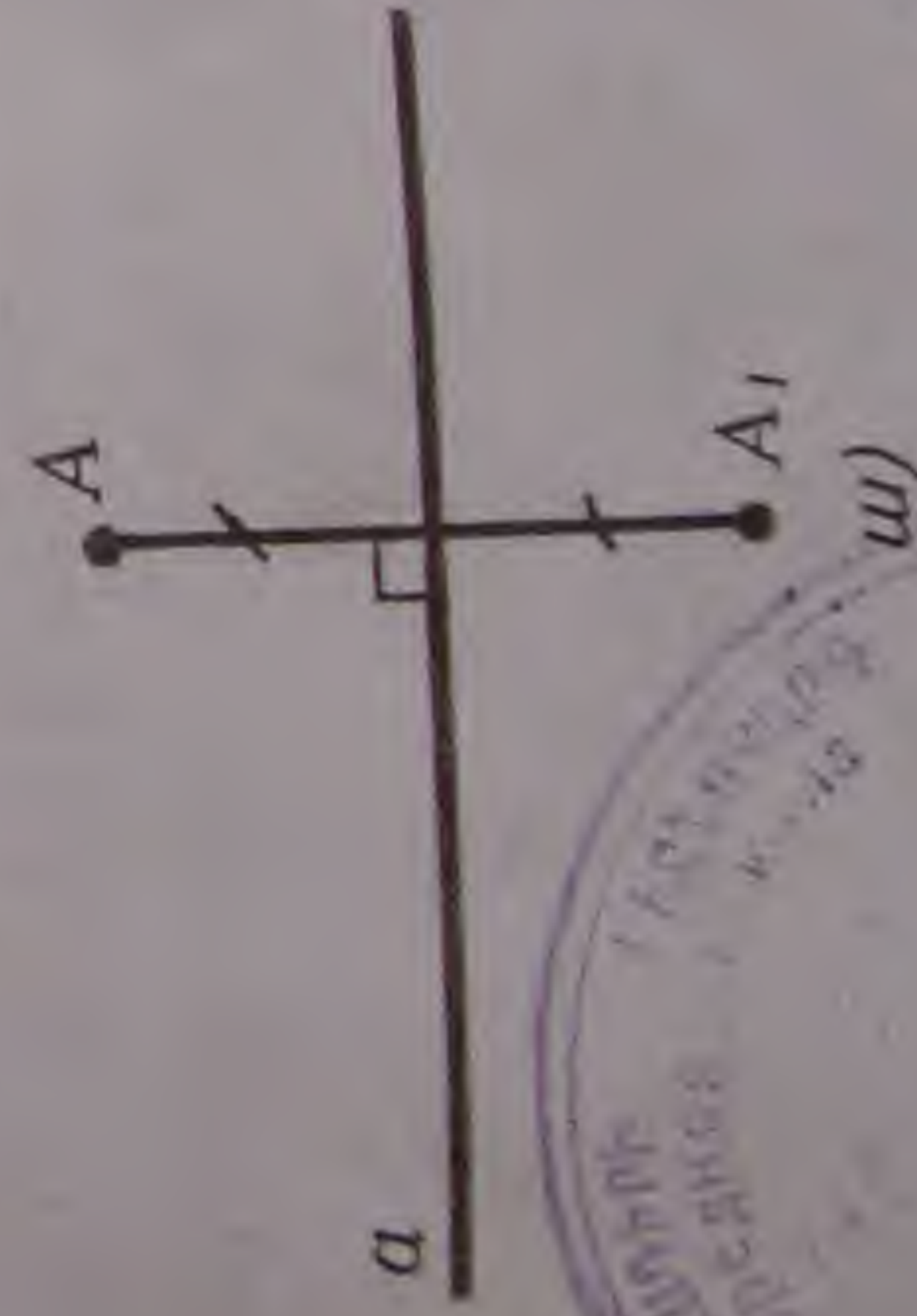
բ. քառակուսու անկյունագծերը հավասար են, փոխուղղահայաց են, հատման կետով կիսվում են և քառակուսու անկյունները կիսում են (նկ. 19, բ):

### 11 Առանցքային և կենտրոնային համաչափություններ:

Ա. Առանցքային համաչափություն: Երկու՝  $A$  և  $A_1$  կետերը կոչվում են  $a$  ուղղի նկատմամբ համաչափ, եթե  $a$  ուղիղն ուղղահայաց է  $AA_1$  հատվածին և անցնում է նրա միջնակետով (նկ. 20, ա): Համարվում է, որ  $a$  ուղղի յուրաքանչյուր կետը համաչափ է ինքը իրեն: 20, բ նկարում  $M$  և  $M_1$ ,  $N$  և  $N_1$  կետերը համաչափ են  $b$  ուղղի նկատմամբ, իսկ  $P$  կետը այդ ուղղի նկատմամբ համաչափ է ինքը իրեն:

Պատկերը կոչվում է  $a$  ուղղի նկատմամբ համաչափ, եթե այդ պատկերի յուրաքանչյուր կետի՝  $a$  ուղղի նկատմամբ համաչափ կետը ևս պատկանում է այդ պատկերին:  $a$  ուղիղը կոչվում է պատկերի համաչափության առանցք: Նաև ասում են, որ պատկերն օժտված է առանցքային համաչափությամբ:

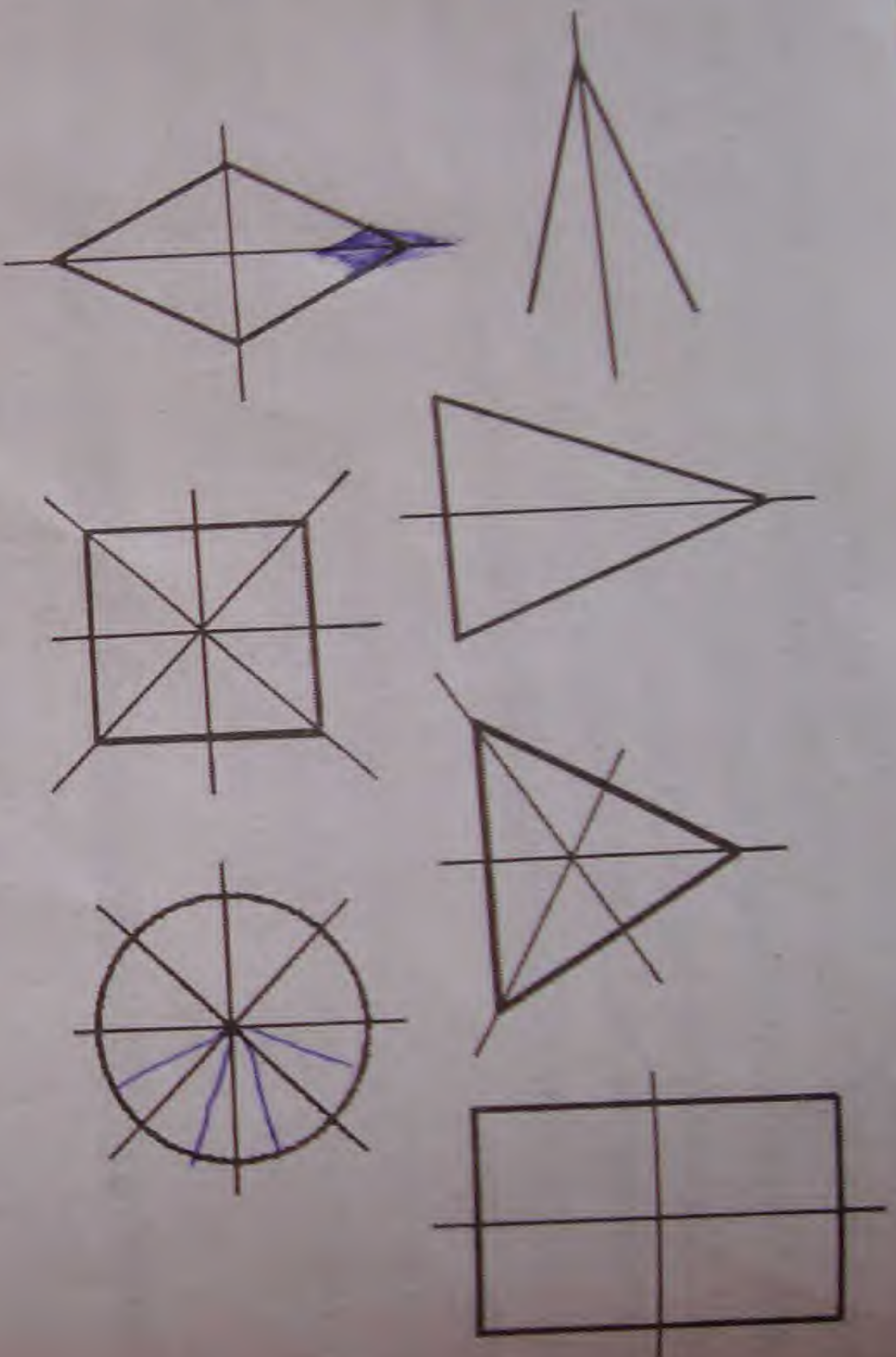
Բերենք պատկերների օրինակներ, որոնք օժտված են առանցքային համաչափությամբ (նկ. 21): Չփռված անկյունն ունի համաչափության մեկ առանցք. դա այն ուղիղն է, որն ընդգրկում է տվյալ անկյան



Նկ. 20







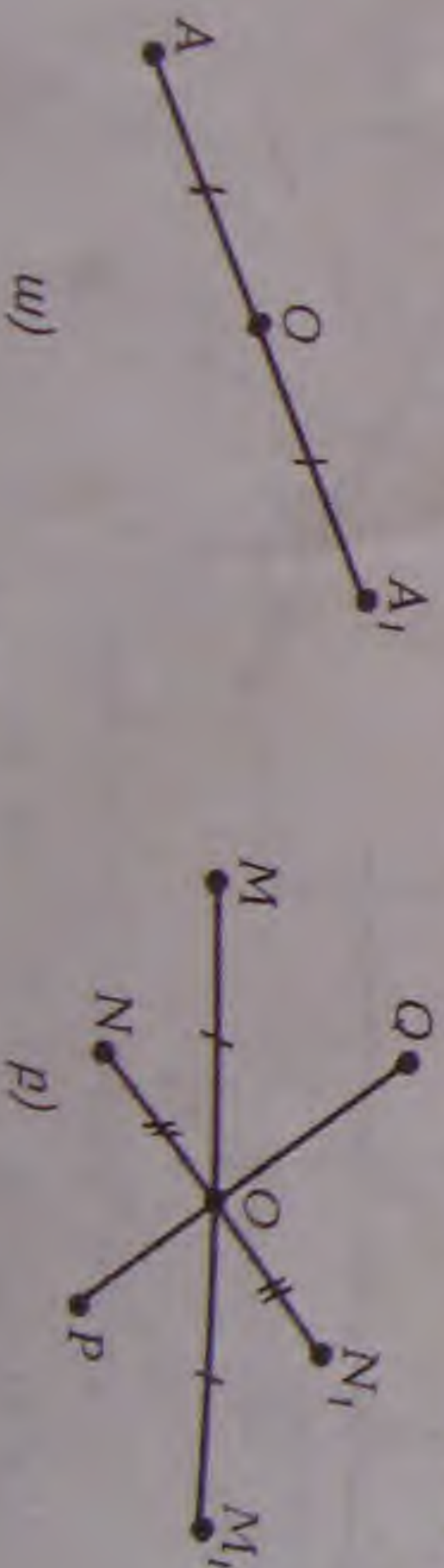
Առանցքային համաչափությամբ օժտված պատկերներ

Շկ. 21

կիսորդը: Հավասարապրուն (քայց ոչ հավասարակողմ) եռանկյունը ևս ունի համաչափության մեկ առանցք, իսկ հավասարակողմ եռանկյունը՝ համաչափության երեք առանցք: Ուղղանկյունը և շեղանկյունը, որոնք քառակուսի չեն, ունեն համաչափության երկուական առանցքներ, իսկ քառակուսին՝ համաչափության չորս առանցք: Շրջանագիծն ունի անվերջ թվով համաչափության առանցքներ. կենտրոնով անցնող յուրաքանչյուր ուղիղ շրջանագծի համաչափության առանցք է:

Կան այնպիսի պատկերներ, որոնք առիսասարակ համաչափության առանցք չունեն: Այդպիսի պատկերներից է ուղղանկյուն և շեղանկյուն չհանդիսացող գուգահեռագիծը, ինչպես նաև տարակողմ եռանկյունը:

**Բ** կենտրոնային համաչափություն: Երկու  $A$  և  $A_1$  կետեր կոչվում են  $O$  կետի նկատմամբ համաչափ, եթե  $O$ -ն  $AA_1$  հատվածի միջնակետն է (ճկ. 22,ա): Համարվում է, որ  $O$  կետը համաչափ է ինքը իրեն: 22,բ նկարում  $M$  և  $M_1$ ,  $N$  և  $N_1$  կետերը համաչափ են  $O$  կետի նկատմամբ, իսկ  $P$  և  $Q$  կետերը այդ կետի նկատմամբ համաչափ չեն:



Շկ. 22





Կենտրոնային համաչափության  
օժտված պատկերներ

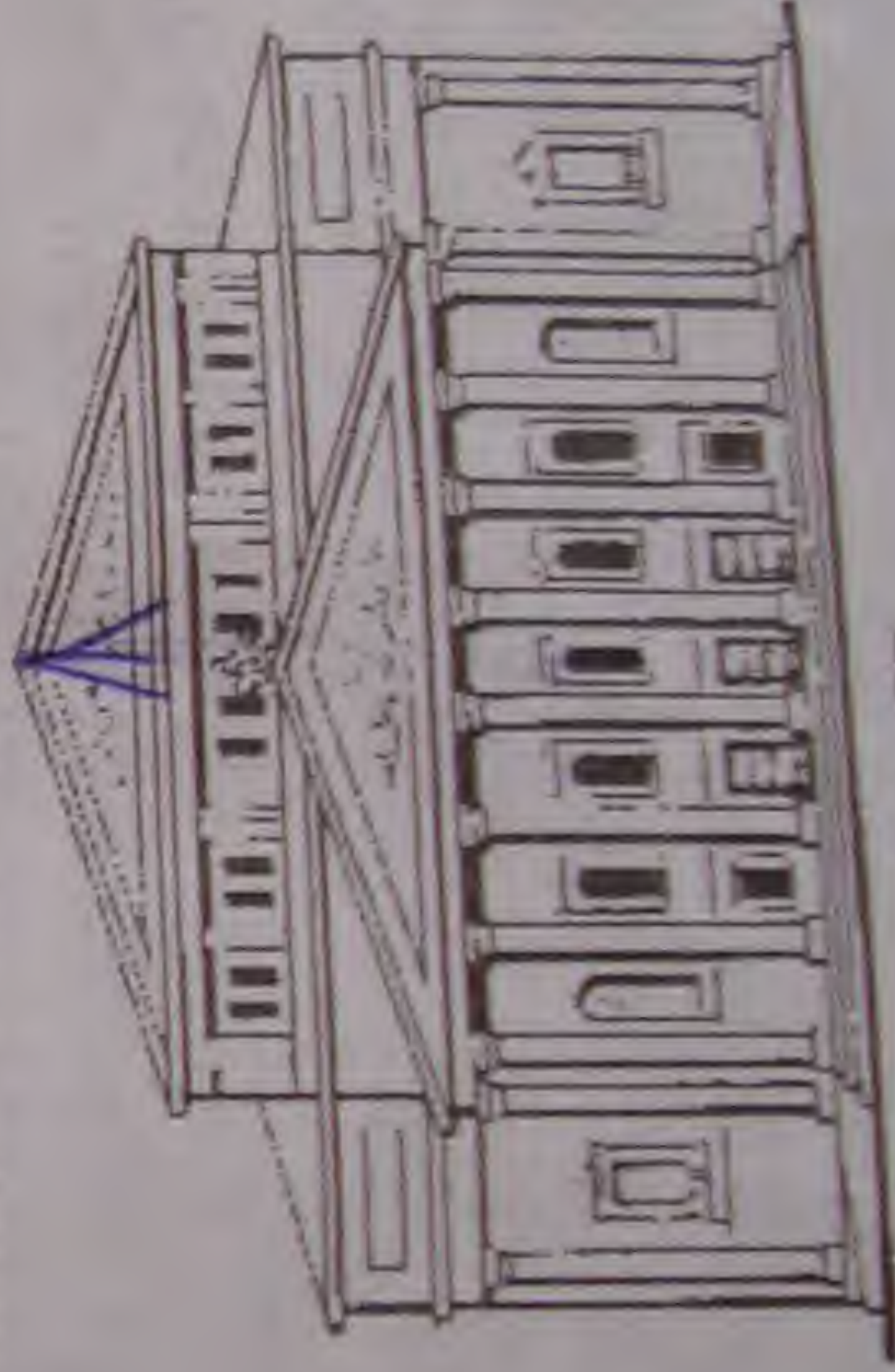
Նկ. 23

Նկ. 24

Պատկերը կոչվում է  $O$  կետի նկատմամբ համաչափ, եթե այդ պատկերի կետերից յուրաքանչյուրի՝  $O$  կետի նկատմամբ համաչափ կետը *և* պատկանում է այդ նույն պատկերին:  $O$  կետը կոչվում է պատկերի համաչափության կենտրոն: Նաև ասում են, որ պատկերն օժտված է կենտրոնային համաչափությամբ: Կենտրոնային համաչափությամբ օժտված պատկերների օրինակներ են շրջանագիծը և զուգահեռագիծը (նկ. 23): Շրջանագծի համաչափության կենտրոնը շրջանագծի կենտրոնն է, իսկ զուգահեռագծի համաչափության կենտրոնը՝ նրա անկյունագծերի հատման կետը: Ուղիղը *և* օժտված է կենտրոնային համաչափությամբ: Ի տարբերություն շրջանագծի և զուգահեռագծի, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի համաչափության մեկ կենտրոն, ուղղի համար դրանք անվերջ շատ են. ուղղի ցանկացած կետ նրա համաչափության կենտրոն է: Համաչափության կենտրոն չունեցող պատկերի օրինակ է եռանկյունը:

Առանցքային կամ կենտրոնային համաչափությամբ են օժտված մեր շրջակա աշխարհի առարկաներից շատերի պատկերները հարթության վրա: Օրինակ, ծառերի տերևներից և ծաղիկների պսակաթերթերից շատերը համաչափ են միջին ցողունի նկատմամբ (նկ. 24):

Համաչափությունն ունի գեղագիտական և կիրառական նշանակություն: Այն մեզ հաճախ է հանդիպում արվեստում, ծարտարապետու-



Նկ. 25



թյան մեջ, տեխնիկայում, կենցաղում: Այսպես, շենքերից շատերի ճակատները նախագծվում են՝ ըստ առանցքային համաչափության (նկ. 25): Մեծ ի մասամբ առանցքի կամ կենտրոնի նկատմամբ համաչափ են արվում գորգերի, գործվածքների, պատամենների նախշերը: Համաչափ են շատ սարքավորումների բազմաթիվ մանրակներ, որոնք լայն կիրառություն ունեն տեխնիկայում և արտադրության մեջ:

### Հարցեր և խնդիրներ

51. Ապացուցեք, որ այն գուրգահեռագիծը, որի անկյուններն են  $\alpha$  և  $\beta$ , ուղիղ է, ուղղանկյուն է:
52. Ապացուցեք, որ եթե քառանկյան բոլոր անկյունները ուղիղ են, ապա քառանկյունը ուղղանկյուն է:
53. Ապացուցեք, որ եթե գուրգահեռագծի բոլոր անկյունները հավասար են, ապա այն ուղղանկյուն է:
54.  $ABCD$  ուղղանկյան անկյունագծերը հատվում են  $O$  կետում:  $\angle COD = 60^\circ$ ,  $CD = 10$  սմ: Գտեք ուղղանկյան անկյունագծերը:
55. Գտեք  $ABCD$  ուղղանկյան պարագիծը, եթե  $A$  անկյան կիսորդը տրոհում է. ա)  $BC$  կողմը  $45,6$  սմ և  $7,85$  սմ հատվածների, բ)  $DC$  կողմը  $2,7$  դմ և  $4,5$  դմ հատվածների:
56.  $ABCD$  ուղղանկյան անկյունագծերը հատվում են  $O$  կետում: Ապացուցեք, որ  $AOD$  և  $AOB$  եռանկյունները հավասարաբան են:
57.  $ABCD$  ուղղանկյան անկյունագծերը հատվում են  $O$  կետում: Գտեք  $AOB$  եռանկյան պարագիծը, եթե  $\angle CAD = 30^\circ$ ,  $AC = 12$  սմ:
58. Ապացուցեք, որ ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգին տարված միջնագիծը հավասար է ներքնաձիգի կեսին:
59.  $ABCD$  ուղղանկյան անկյունագծերը հատվում են  $O$  կետում,  $E$ -ն  $AB$  կողմի միջնակետն է,  $\angle BAC = 50^\circ$ : Գտեք  $\angle AOE$ -ն:
60.  $MPKH$  ուղղանկյան անկյունագծերը հատվում են  $O$  կետում:  $OA$  հատվածը  $MOP$  եռանկյան բարձրությունն է,  $\angle AOP = 15^\circ$ : Գտեք  $\angle OHK$ -ն:
61. Ուղղանկյան անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը մեծ կողմից  $4$  սմ է, իսկ փոքր կողմից՝  $6$  սմ: Գտեք ուղղանկյան պարագիծը:
62. Ուղղանկյան անկյուններից մեկի կիսորդը ուղղանկյան կողմը բաժանում է երկու հավասար հատվածների: Գտեք ուղղանկյան պարագիծը, եթե նրա փոքր կողմը  $10$  սմ է:



63. Շեղանկյան անկյունագծերից մեկը հավասար է կողմին: Գտեք. **ա)** շեղանկյան անկյունները, **բ)** այն անկյունները, որոնք կազմում են շեղանկյան անկյունագծերը նրա կողմերի հետ:
64. Գտեք  $ABCD$  շեղանկյան պարագիծը, եթե  $\angle B = 60^\circ$ ,  $AC = 10,5$  սմ: Գծերը նրա կողմի հետ, որոնք կազմում են շեղանկյան անկյուններից մեկը  $45^\circ$  է:
65. Ապացուցեք, որ զուգահեռագիծը շեղանկյուն է, եթե **ա)** նրա անկյունագծերը փոխուղղահայաց են, **բ)** զուգահեռագծի անկյունագծերը նրա անկյունների կիսորդ են:
67.  $ABCD$  շեղանկյան մեջ  $\angle B = 120^\circ$ : Անկյունագծերը հատվում են  $O$  կետում:  $BC$  կողմը 10 սմ է: Գտեք  $BD$  անկյունագիծը:
68. Շեղանկյան գագաթներից մեկով նրա հանդիպակաց անկյունը կազմող կողմերին տարված ուղղահայացները կազմում են  $30^\circ$ -ի անկյուն, ընդ որում՝ դրանցից յուրաքանչյուրի երկարությունը 5 սմ է: Գտեք շեղանկյան կողմը:
69. Քառակուսու անկյունագծերի հատման կետից մինչև կողմերը եղած հեռավորությունների գումարը 20 սմ է: Գտեք քառակուսու պարագիծը:
70. Քառակուսու պարագիծը 80 սմ է: Որքա՞ն է քառակուսու անկյունագծի միջնակետի հեռավորությունը նրա կողմից:
71. Ապացուցեք, որ եթե շեղանկյան մի անկյունը ուղիղ է. ապա այդ շեղանկյունը քառակուսի է:
72. Քառակուսի՞ է, արդյոք, քառանկյունը, եթե նրա անկյունագծերը. **ա)** հավասար են և փոխուղղահայաց, **բ)** փոխուղղահայաց են և ունեն ընդհանուր միջնակետ, **գ)** հավասար են, փոխուղղահայաց են և ունեն ընդհանուր միջնակետ:
73. Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան կիսորդի և ներքնածիզի հատման կետով տարված են էջերին զուգահեռ ուղիղներ: Ապացուցեք, որ առաջացած քառանկյունը քառակուսի է:
74. Համաչափության քանի՞ առանցք ունի. **ա)** հատվածը, **բ)** ուղիղը, **գ)** ճառագայթը:
75. Հետևյալ տառերից որո՞նք ունեն համաչափության առանցք. **ա)** Ա, Ծ, Ս, Ո, Տ, Փ, Օ, **բ)** Ա, Բ, Ե, Ը, Դ, Օ, Մ, Ի, Կ:
76. Ապացուցեք, որ ուղղանկյան հանդիպակաց կողմերի միջնակետերով անցնող ուղիղը նրա համաչափության առանցքն է:
77. Ապացուցեք, որ հավասարաբար ունեն համաչափության առանցքն է: սորդն ընդգրկող ուղիղը նրա համաչափության առանցքն է:



78. Ունի՞, արդյոք, համաչափության կենտրոն. ա) հատվածը, բ) ճառագայթը, գ) հատվող ուղիղների գույզը, դ) բառակուսին:

79. Հետևյալ տառերից որո՞նք ունեն համաչափության կենտրոն.  
ա) Ա, Ը, Տ, Ց, Փ, Օ, Ծ, Բ) Ա, Բ, Մ, Կ, Ք, Փ:

## ԿԱՌԱՅՄԱՆ ԽՆՈՒՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Նկարագրենք մի ծրագիր, որով սովորաբար լուծում են կառուցման խնդիրները՝ կարկինի և քանոնի օգնությամբ: Այն կազմված է չորս մասից:

- 1) խնդրի լուծման եղանակի հայտնաբերում՝ որոնելի տարրերի և խնդրի տվյալների միջև կապերի բացահայտման միջոցով: Այս մասը կոչվում է *խնդրի վերլուծություն*: Վերլուծությունը հնարավորություն է տալիս կազմելու խնդրի լուծման պլան:
- 2) *կառուցման* կատարումը՝ ըստ նշված պլանի:
- 3) *Ապացուցում*ն այն բանի, որ կառուցված պատկերը բավարարում է խնդրի պայմաններին:

4) խնդրի *հետազոտում*, այն է՝ պարզել, թե արդյո՞ք ցանկացած տվյալների դեպքում խնդիրը լուծում ունի, եթե այո, ապա՝ քանի՞ լուծում:

Այն դեպքերում, երբ խնդիրը բավականաչափ պարզ է, առանձին մասերը, օրինակ՝ վերլուծությունը կամ հետազոտումը, բաց է թողնվում: Հիշեք, որ մենք այդպես էինք վարվում 6-րդ դասարանում:

Այժմ այս ծրագիրը ցուցադրենք օրինակով:

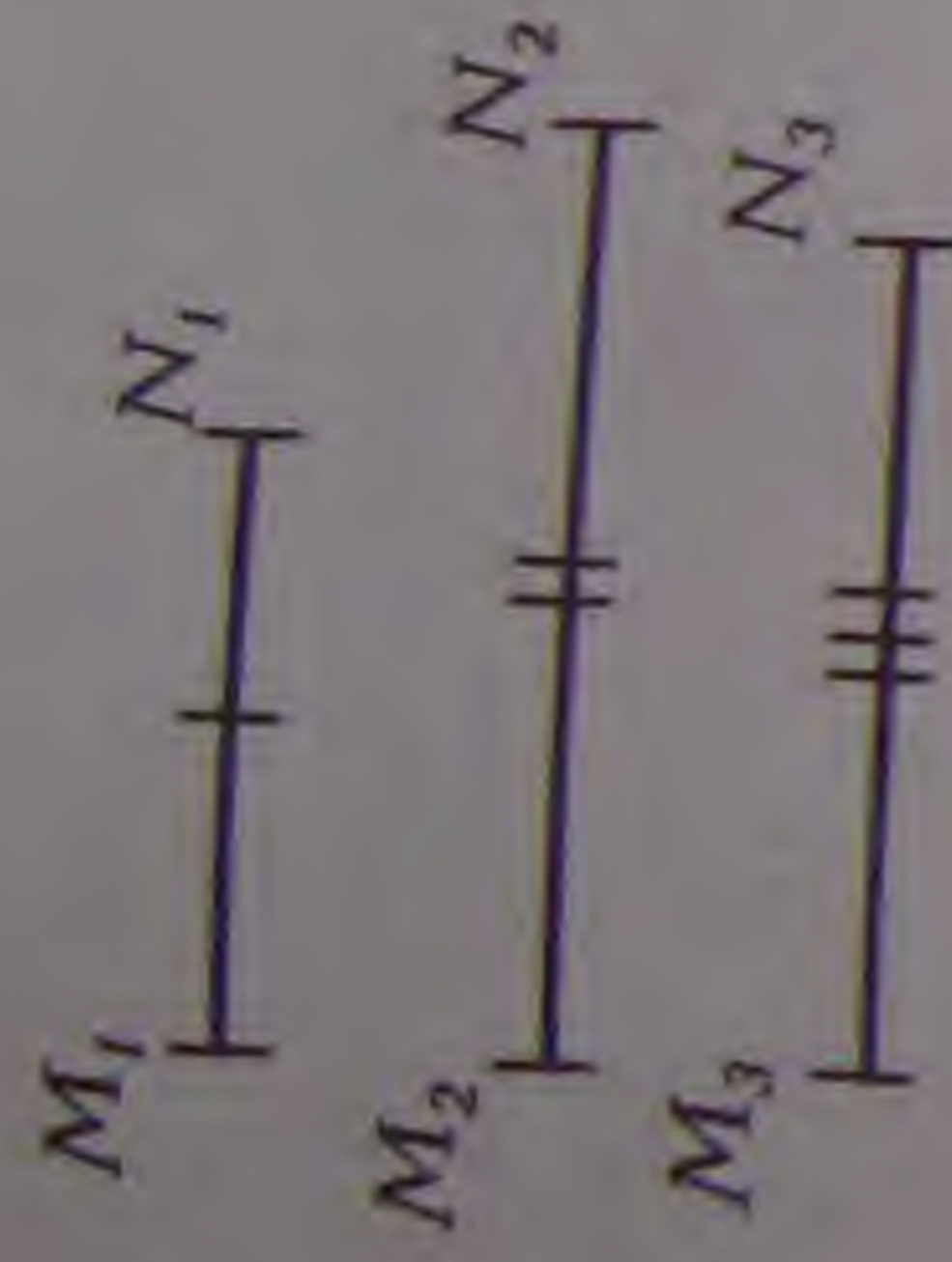
**Խ ն դ ի ռ:** *Կառուցել գուրգահեռագիծ՝ երկու կից կողմերով և անկյունագծերից մեկով:*

**Լ ո ծ ու մ:** Նախ ճշտենք, թե ինչպես պետք է հասկանալ այս խնդիրը: Տրված են երեք հատված՝  $M_1N_1$ ,  $M_2N_2$ ,  $M_3N_3$  (նկ. 26, ա): Պահանջվում է կառուցել այնպիսի  $ABCD$  գուրգահեռագիծ, որի կից կողմերը, ասենք՝  $AB$ -ն, և  $BC$ -ն, հավասար լինեն համապատասխանաբար  $M_1N_1$  և  $M_2N_2$  հատվածներին, իսկ անկյունագծերից մեկը, օրինակ՝  $BD$ -ն հավասար լինի  $M_3N_3$  հատվածին:

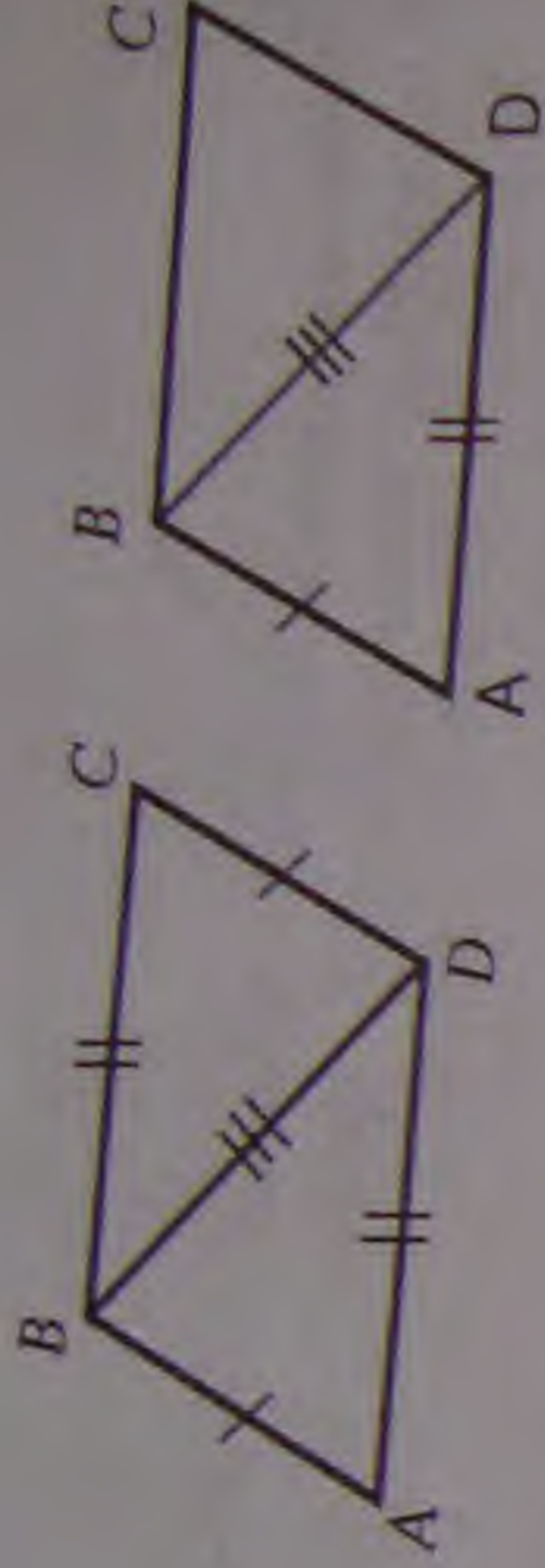
Խնդիրը լուծենք ըստ նկարագրված ծրագրի:

**Վ ե ռ լ ո ծ ու թ յ ու մ:** Ենթադրենք, թե  $ABCD$  որոնելի գուրգահեռագիծը կառուցված է (նկ. 26, բ): Մենք տեսնում ենք, որ  $BAD$  եռանկյան կողմերը հավասար են տրված  $M_1N_1$ ,  $M_2N_2$  և  $M_3N_3$  հատված-





ա)



բ)

Նկ. 26

գ)

ներին: Այս հանգամանքը մեզ հուշում է խնդրի լուծման հետևյալ ուղին. անհրաժեշտ է նախ՝ կառուցել  $ABD$  եռանկյունը՝ իր երեք կողմերով, իսկ այնուհետև՝ լրացնել նրա կառուցումը մինչև  $ABCD$  զուգահեռագիծը:

Կա ն ո ն ի գ ու մ: Կառուցենք  $ABD$  եռանկյունն այնպես, որ նրա  $AB$ ,  $AD$  և  $BD$  կողմերը հավասարվեն համապատասխանաբար  $M_1N_1$ ,  $M_2N_2$  և  $M_3N_3$  հատվածներին (իսկ թե դա ինչպես անել, մենք արդեն գիտենք 6-րդ դասարանից): Այնուհետև  $B$  կետով տանենք ուղիղ՝ զուգահեռ  $AD$ -ին, և  $D$  կետով երկրորդ ուղիղ՝ զուգահեռ  $AB$ -ին (զուգահեռ ուղիղներ տանելը ևս գիտենք՝ 6-րդ դասարանից):

Կառուցված այդ ուղիղների հատման կետը նշանակենք  $C$  տառով (նկ. 26, գ):  $ABCD$  քառանկյունը որոնելի զուգահեռագիծն է:

Ա պ ա գ ու գ ու մ: Ըստ կառուցման՝  $AB \parallel CD$  և  $BC \parallel AD$ , ուստի՝  $ABCD$ -ն զուգահեռագիծ է: Ջուգահեռագծի կից կողմերը և անկյունագիծը համապատասխանաբար հավասար են տրված  $M_1N_1$ ,  $M_2N_2$  և  $M_3N_3$  հատվածներին՝ նույնպես ըստ կառուցման: Այսպիսով՝  $ABCD$  զուգահեռագիծը որոնելին է:

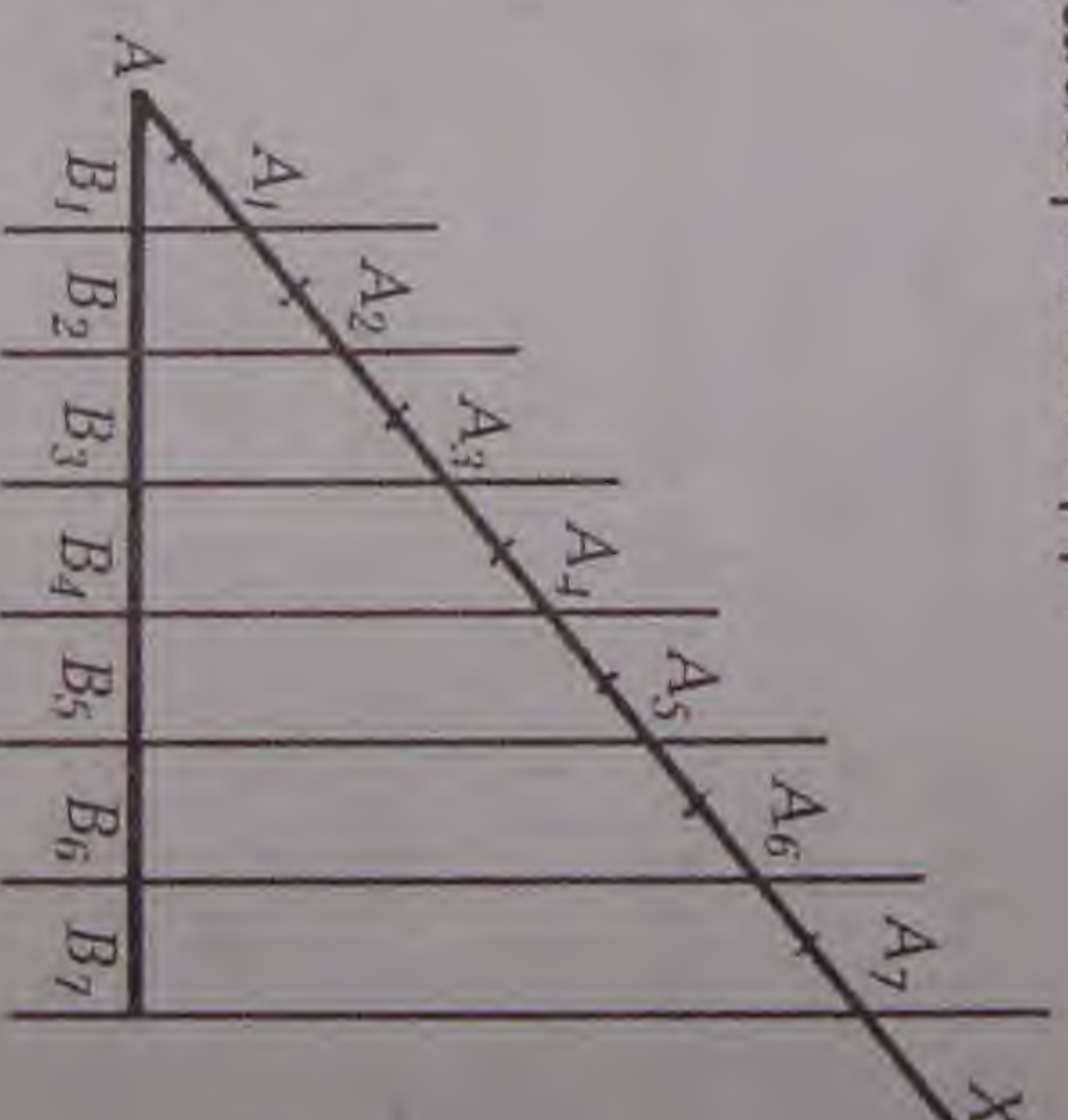
Հ ե տ ա գ ո տ ու մ: Պարզ է, որ եթե տրված երեք՝  $M_1N_1$ ,  $M_2N_2$  և  $M_3N_3$  հատվածներով կարելի է կառուցել  $ABD$  եռանկյուն, որի կողմերը հավասար լինեն այդ հատվածներին, ապա կարելի կլինի կառուցել նաև զուգահեռագիծ: Սակայն  $ABD$  եռանկյուն կառուցել միշտ չէ, որ կարելի է: Եթե տրված հատվածներից որևէ մեկը մեծ կամ հավասար լինի մյուս երկուսի գումարին, ապա  $ABD$  եռանկյուն, հետևաբար նաև  $ABCD$  զուգահեռագիծ կառուցելը հնարավոր չէ:

Փորձեք ինքնուրույն ապացուցել, որ եթե խնդիրն ունի լուծում, ապա այդ լուծումը միակն է:





80. Կառուցեք զուգահեռագիծ. **ա)** երկու կից կողմերով և նրանցով կազմված անկյունով, **բ)** երկու անկյունագծերով և դրանցով կազմված անկյունով:
81. Կառուցեք զուգահեռագիծ. **ա)** նրա մեծ կողմով, փոքր անկյունագծով և դրանցով կազմված անկյունով, **բ)** երկու անկյունագծով և մեծ կողմով:
82. Կառուցեք ուղղանկյուն սեղան. **ա)** փոքր հիմքով և սրունքներով, **բ)** փոքր անկյունագծով, մեծ հիմքով և մեծ սրունքով:
83. Տրված են մի ուղղի վրա չգտնվող երեք կետ՝  $A$ ,  $B$  և  $C$ : Կառուցեք զուգահեռագիծ այնպես, որ նրա երեք գագաթը համընկնեն տրված կետերին: Այդպիսի քանի՞ զուգահեռագիծ է կարելի կառուցել:
84. Տրված  $AB$  հատվածը բաժանեք  $n$  հավասար մասերի:



Նկ. 27

- Լ ո լ ծ ու մ: Տանենք  $AX$  ծառագայթ, որը չի գտնվում  $AB$  ուղղի վրա: Նրա վրա  $A$  կետից հաջորդաբար տեղադրենք  $n$  հատ հավասար հատվածներ՝  $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$  (Նկ. 27), այսինքն՝ այնքան թվով հավասար հատվածներ, որքան մասի անհրաժեշտ է բաժանել  $AB$  հատվածը (Նկ. 27-ում  $n=7$ ): Տանենք  $A_nB$  հատվածը ( $A_n$ -ը վերջին հատվածի ծայրակետն է): Այնուհետև  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  կետերով տանենք  $A_nB$  ուղղին զուգահեռ ուղիղներ: Այս ուղիղները  $AB$  հատվածը հատում են  $B_1, B_2, \dots, B_n$  կետերում, որոնք, ըստ Ռալեյի թեորեմի,  $AB$  հատվածը բաժանում են  $n$  հատ հավասար հատվածների:
85. Կառուցեք  $ABCD$  հավասարասրուն սեղան. **ա)** տրված  $AD$  հիմքով,  $A$  անկյունով և  $AB$  սրունքով, **բ)** տրված  $BC$  հիմքով,  $AB$  սրունքով և  $BD$  անկյունագծով:
86. Կառուցեք շեղանկյուն. **ա)** անկյունով և այդ անկյան գագաթով անցնող անկյունագծով, **բ)** անկյունագծով և նրա հանդիպակաց անկյունով:
87. Կառուցեք շեղանկյուն. **ա)** կողմով և անկյունագծով, **բ)** երկու անկյունագծով:
88. Կառուցեք քառակուսի. **ա)** կողմով, **բ)** անկյունագծով:
89. Կառուցեք ուղղանկյուն. **ա)** երկու կից կողմերով, **բ)** կողմով և անկյունագծով, **գ)** անկյունագծով և անկյունագծերի կազմած անկյունով:

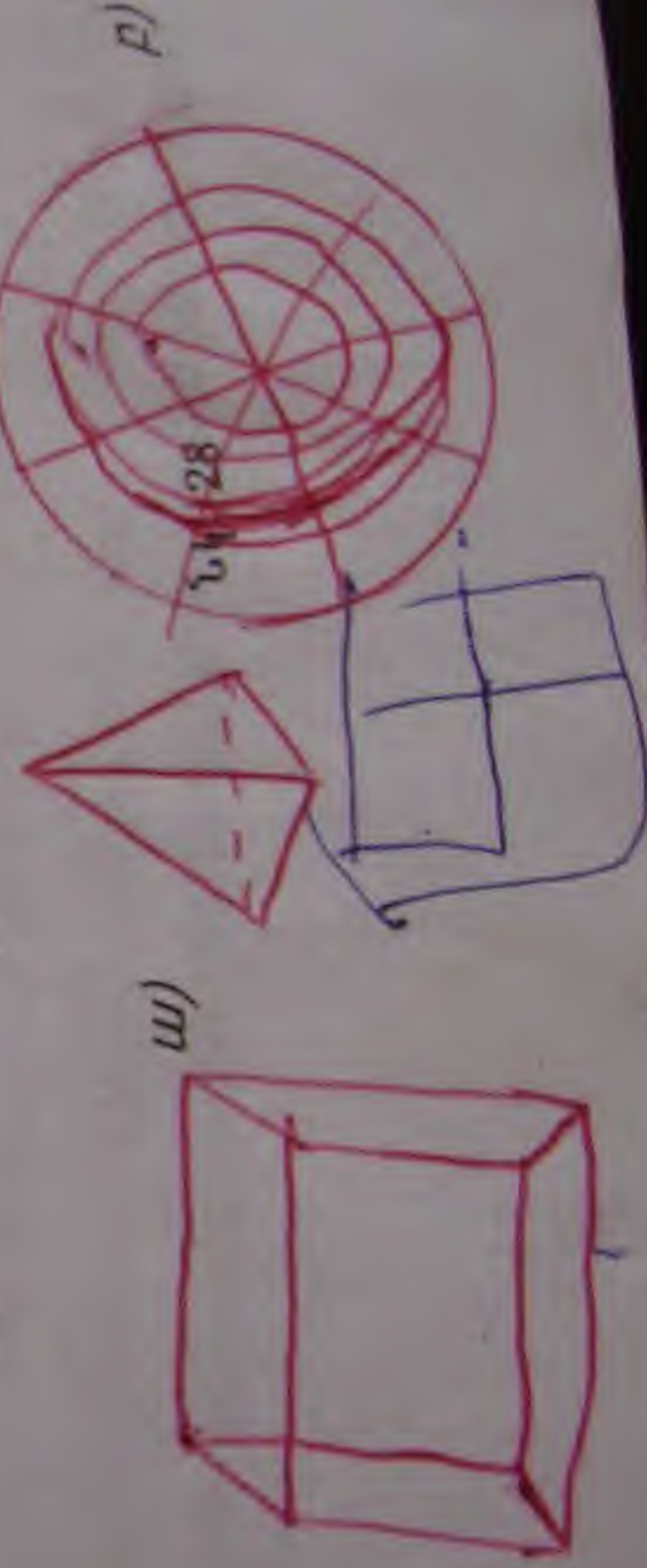
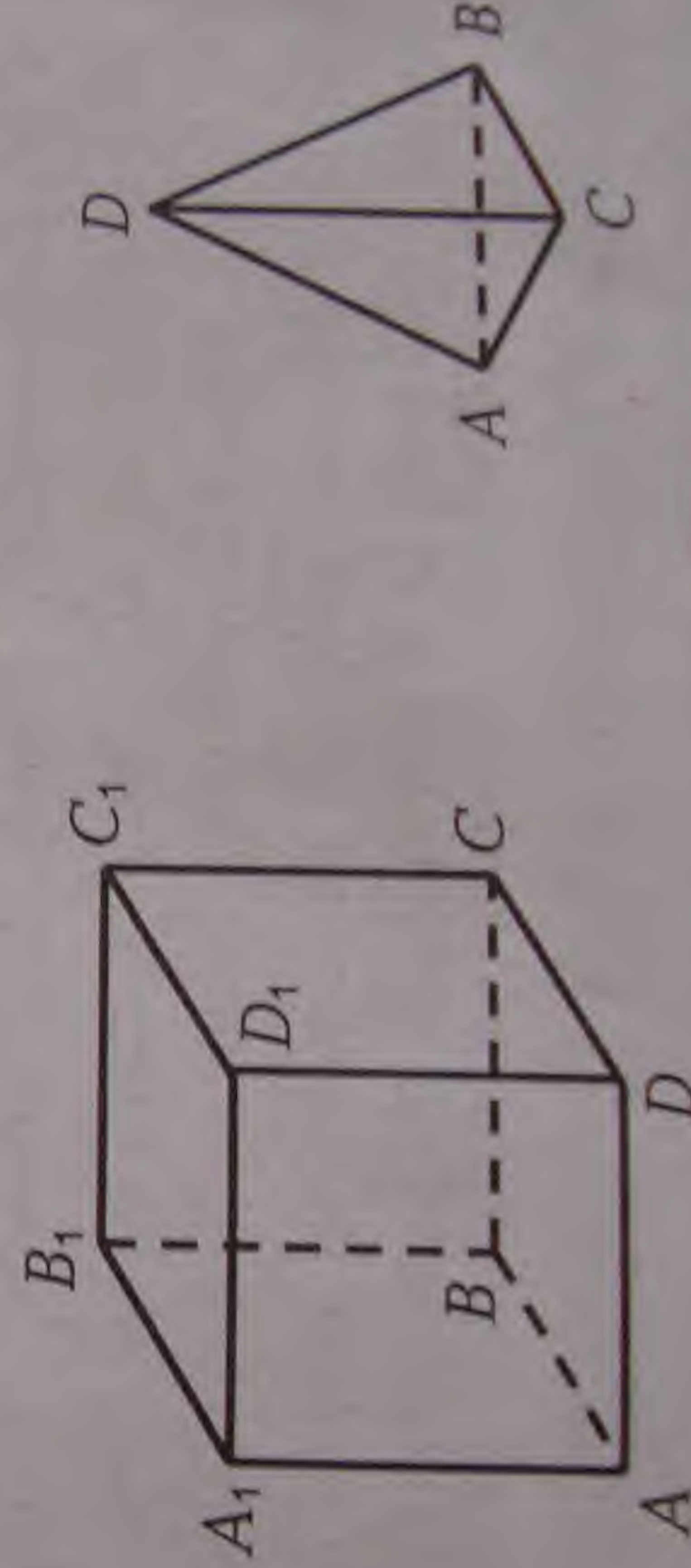


# ՊԱՏԿԵՐԱՑՈՒՄ ԲԱԶՄԱՆԻՍՏԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

**12) Տարածական պատկերներ:** Ուսումնասիրենք իրականության մեջ հաճախ հանդիպող այնպիսի պատկերներ, որոնց պատկանող ոչ բոլոր կետերն են գտնվում մի հարթության վրա: Օրինակ՝ ձեր դասագիրքը ինչ ձևով էլ փորձեք տեղափոխել սեղանի հարթության վրա, միևնույն է, սեղանի հարթությունը չի կարող ընդգրկել դասագրքի բոլոր կետերը: Երկրաչափական պատկերը, որի բոլոր կետերը չեն կարող գտնվել մի հարթության վրա, ընդունված է անվանել *տարածական պատկեր (մարմին)*: Նկար 28-ում պատկերված են երկրաչափական մարմիններ, որոնց մասին դուք ունեք նախնական պատկերացումներ: Դրանք են ուղղանկյունամիստը (նկ. 28,ա) և բուրգը (նկ. 28,բ): Տարածության մեջ այդ մարմինները սահմանափակված են *մակերևույթով*: Եթե մարմնի մակերևույթը կազմված է միայն վերջավոր թվով բազմանկյուններից, ապա այն կոչվում է *բազմանիստ*: Հաճախակի հանդիպող բազմանիստի օրինակ է ուղղանկյունամիստը (տես նկ. 28,ա), որի բոլոր միստերը ուղղանկյուններ են:

Բազմանիստի մակերևույթը կազմող բազմանկյունները կոչվում են *միստեր*, դրանց կողմերը՝ բազմանիստի *կողմեր*, իսկ գագաթները՝ բազմանիստի *գագաթներ*:

Ծանոթություն: Տարածական պատկերները գծագրելու համար պահանջվում են որոշակի հմտություններ: Բանն այն է, որ գծագրի վրա կարող ենք պատկերել մարմնի միայն «ստվերը», քանի որ տարածական մարմինը հարթ թղթի վրա չի տեղափոխվում:





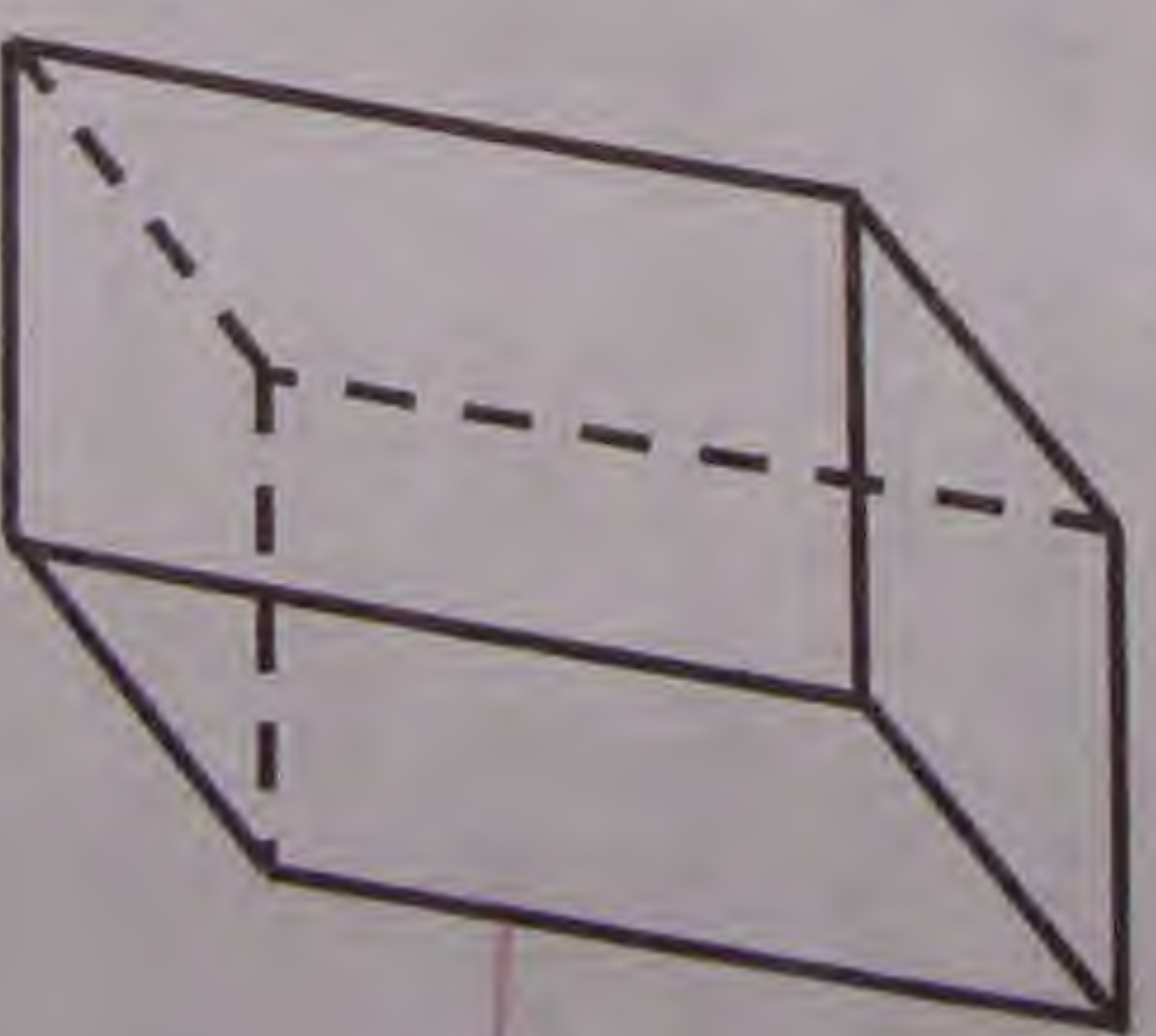
Այսպիսով՝ տարածական պատկերները գծագրելու համար անհրա-  
ժեշտ է առաջնորդվել մի քանի կանոններով: Թվարկենք դրանցից մի  
քանիսը:

ա) Եթե մարմինը դիտելիս նրա որևէ գիծը ծածկված է և չի երևում,  
ապա այդ գիծը գծագրի վրա նշվում է *ընդհատ գծերով*: Օրինակ՝  $AB$

հատվածը նկար 28-ում չի երևում:

բ) Տարածական մարմնի գծապատկերի վրա համեմատվող հատ-  
վածների և հատկապես անկյունների *շափսնքը կարող են չպահպանվել*:  
Օրինակ՝ 28,ա նկարում պատկերված ուղղանկյունաձևիստի, ասենք,  
 $A_1B_1$  կողը պատկերված է թեքված դիրքից. նրա երկարությունը կարող  
է ավելի փոքր թվալ, քան  $AA_1$  կողինը: Նմանապես  $BAD$  անկյունը թեև  
իրականում ուղիղ է, սակայն նկարում երևում է իբրև սուր անկյուն:

գ) Չուղահեռ ուղիղները միշտ *պատկերվում են գուրահեռ*՝ անկախ  
պատկերման դիրքից: Օրինակ՝ 28,ա նկարում  $AD \parallel BC$ ,  $DC \parallel D_1C_1$  և այլն:



Նկ. 29

**13 Չուղահեռանիստ:** Չուղահեռանիստը այն  
բազմանիստն է, որի մակերևույթի բոլոր բազման-  
կյունները չուղահեռագծեր են (նկ. 29, տե՛ս նաև  
28,ա նկարը, որը ևս չուղահեռանիստի գծապատ-  
կեր է): Չուղահեռանիստի բոլոր նիստերը չուղա-  
հեռագծեր են: Յուրաքանչյուր չուղահեռանիստ  
ունի 6 նիստ: 28,ա նկարում դիտարկենք, օրի-  
նակ,  $AA_1B_1B$  և  $DD_1C_1C$  նիստերը: Դրանք չունեն ընդհանուր գագաթ  
(չունեն նաև ընդհանուր կող) և կոչվում են *հանդիպակաց նիստեր*:  
Յանդիպակաց նիստերից երկուսը, օրինակ,  $ABCD$ -ն և  $A_1B_1C_1D_1$ -ը  
կոչվում են չուղահեռանիստի *հիմքեր*, իսկ մյուսները՝ *կողմնային  
նիստեր*: Չուղահեռանիստն ունի չորս կողմնային նիստ: Չուղահեռա-  
նիստն ունի 12 կող, յուրաքանչյուր կողը միաժամանակ գտնվում է եր-  
կու նիստերի վրա: Չուղահեռանիստի յուրաքանչյուր գագաթ միաժա-  
մանակ գագաթ է նրա երեք նիստերի համար: Չուղահեռանիստն ունի  
8 գագաթ:

Չուղահեռանիստի գագաթները կոչվում են *հանդիպակաց*, եթե  
դրանք չեն գտնվում նույն նիստի վրա: Այդպիսի գագաթ են  $A$ -ն և  $C_1$ -ը,  
 $B$ -ն և  $D_1$ -ը,  $D$ -ն և  $B_1$ -ը,  $C$ -ն և  $A_1$ -ը: Չուղահեռանիստի հանդիպակաց  
գագաթները միացնող հատվածները կոչվում են *անկյունագծեր*: Չու-



գահեռանիստի հանդիպակաց գագաթների գույգերը չորսն են, այսինքն գուգահեռանիստն ունի չորս անկյունագիծ:

Մենք գիտենք, որ գուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում և թյամբ օժտված են մալ գուգահեռանիստի անկյունագծերը: Այն է. գուգահեռանիստի բոլոր չորս անկյունագծերը հատվում են մի կենտում և հատման կենտով կիսվում են:

**14 Ուղղանկյունանիստ և խորանարդ:** Այն գուգահեռանիստը, որի բոլոր նիստերը ուղղանկյուններ են, կոչվում է ուղղանկյունանիստ (տե ս մկ. 28,ա): Ուղղանկյունանիստի տեսք ունեն տուփերը, համանման՝ ուղղանկյունանիստը շատերը և այլն: Ձուգահեռանիստի տարրերին 4 անկյունագիծ:

Մենք գիտենք, որ ուղղանկյան անկյունագծերը հավասար են: Պարզվում է, որ համանման հատկությամբ օժտված են մալ ուղղանկյունանիստի անկյունագծերը: Այն է. ուղղանկյունանիստի բոլոր չորս անկյունագծերը հավասար են:

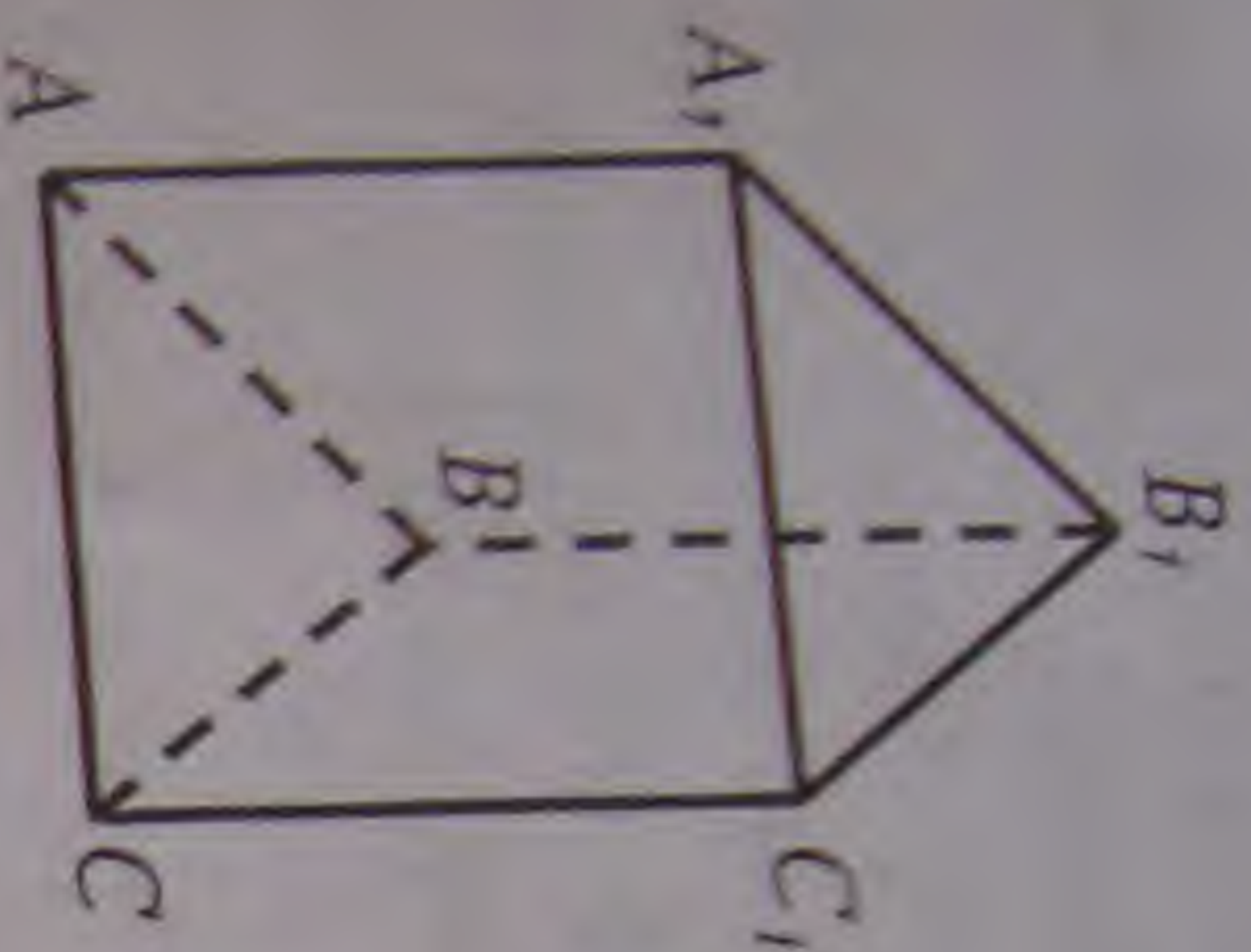
Այն ուղղանկյունանիստը, որի բոլոր կողերը հավասար են, կոչվում է խորանարդ:

Այսպիսով, խորանարդի բոլոր նիստերը քառակուսիներ են: Այսինքն՝ խորանարդի մակերևույթը կազմված է 4/59 հավասար քառակուսիներից<sup>1</sup>:

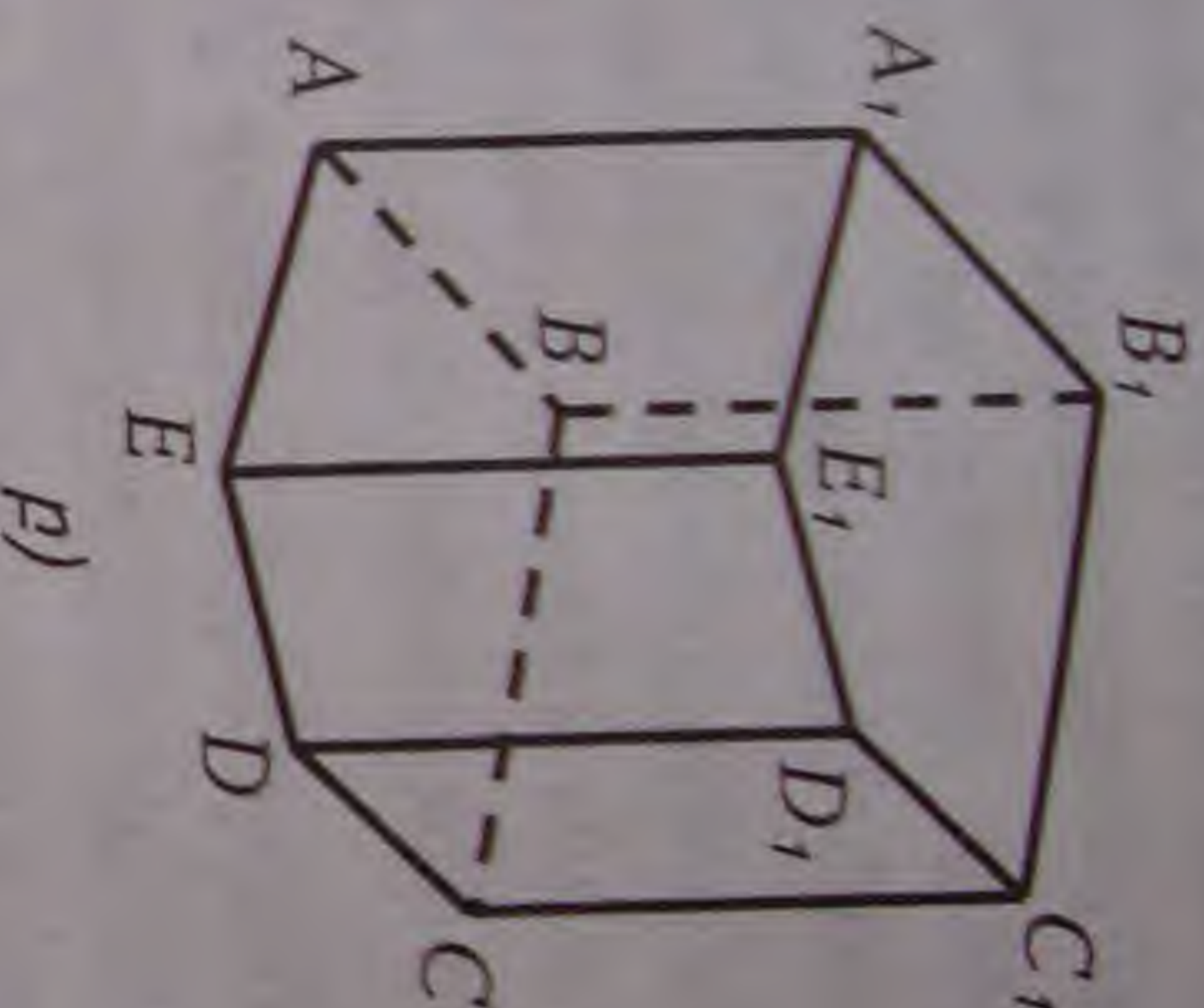
**15 Պրիզմա (հարվածակողմ):** Դիտենք մկար 30-ը: Նրանում պատկերված են բազմանիստեր, որոնց մակերևույթը կազմված է երկու հավասար բազմանկյուններից, իսկ մյուս բոլոր նիստերը ուղղանկյուններ են: 30,ա մկարում  $ABC$  և  $A_1B_1C_1$  եռանկյունները հավասար են, և  $AA_1B_1B$ ,  $AA_1C_1C$ ,  $BB_1C_1C$  քառանկյուններից յուրաքանչյուրը ուղղանկյուն է: 30,բ մկարում հավասար բազմանկյուններն են  $ABCDE$ -ն և  $A_1B_1C_1D_1E_1$ -ը, իսկ մյուս պատկերները՝  $AA_1B_1B$ -ն,  $BB_1C_1C$ -ն,  $CC_1D_1D$ -ն,  $DD_1E_1E$ -ն և  $EE_1A_1A$ -ն, ուղղանկյուններ են: Այդպիսի մարմինները կոչվում են ուղիղ պրիզմա: Այդ հավասար բազման-

<sup>1</sup> Ուշագրավ է հետևյալ փաստը. մկատի ունենալով խորանարդի միանման վեց նիստեր (երեսներ) ունենալը՝ մախորդ դարերում տպագրված հայերեն դասագրքերում խորանարդին անվանել են **վեցերես**, որի ցայտուն օրինակ է գառը:





ա)



բ)

Նկ. 30

կյունները կոչվում են պրիզմայի *հիմքեր*, իսկ ուղղանկյունները՝ *կողմնային նիստեր*: Յուրաքանչյուր կողմնային նիստի հանդիպակաց երկու կողը գտնվում են հիմքերի վրա, իսկ մյուս երկու կողը միացնում են հիմքերի գագաթները: Այդ կողերը կոչվում են *կողմնային կողեր*:

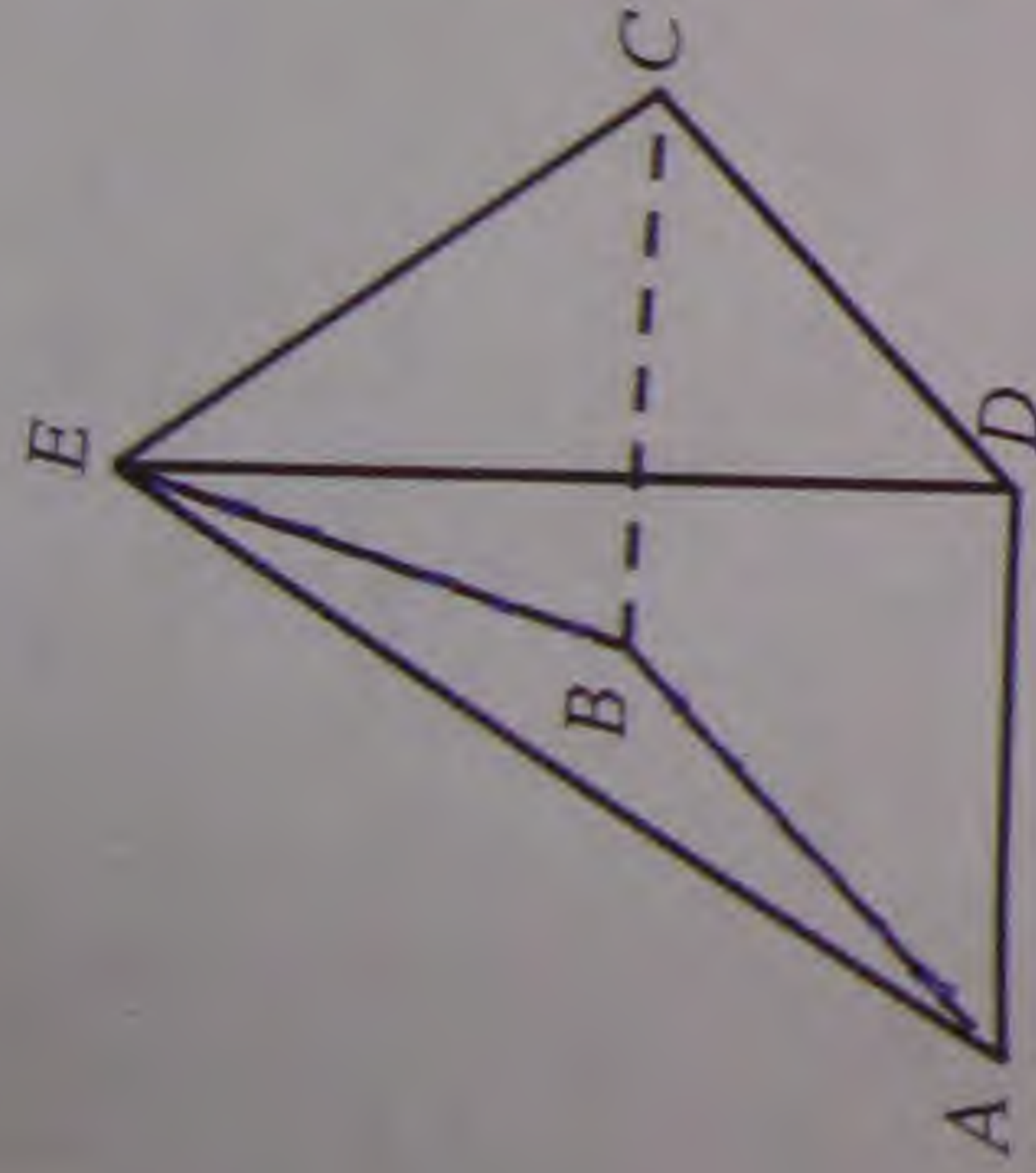
Ըստ հիմքի բազմանկյան պրիզման կարող է լինել եռանկյուն պրիզմա, քառանկյուն պրիզմա, հնգանկյուն պրիզմա և այլն: Դիտարկվում են նաև *թեք պրիզմաներ*, որոնց կողմնային նիստերը զուգահեռագծեր են: Պրիզման նշանակելու համար հերթականությամբ թվարկում են նրա հիմքերի գագաթները: Օրինակ. 30,բ նկարում պատկերված է  $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$  պրիզման:

*n*-անկյուն պրիզման ունի 3*n* կող, 2*n* գագաթ, *n*+2 նիստ, ընդ որում՝ *n* նիստերից 2-ը *հիմքեր* են, իսկ *n*-ը՝ *կողմնային նիստեր*: Պարզվում է, որ պրիզմայի բոլոր կողմնային կողերը միմյանց հավասար են (իսկ նրանց ընդգրկող ուղիղները չեն հատվում):

**16 Բուրգ:** Բուրգի մասին դուք նախնական պատկերացումներ ունեք, կարդացել և դիտել եք հաղորդումներ՝ նվիրված Աշխարհի Յոթ հրաշալիքներից մեկին՝ Եգիպտական բուրգերին: Իսկ ինչպե՞ս ստանանք բուրգը՝ որպես երկրաչափական մարմին:

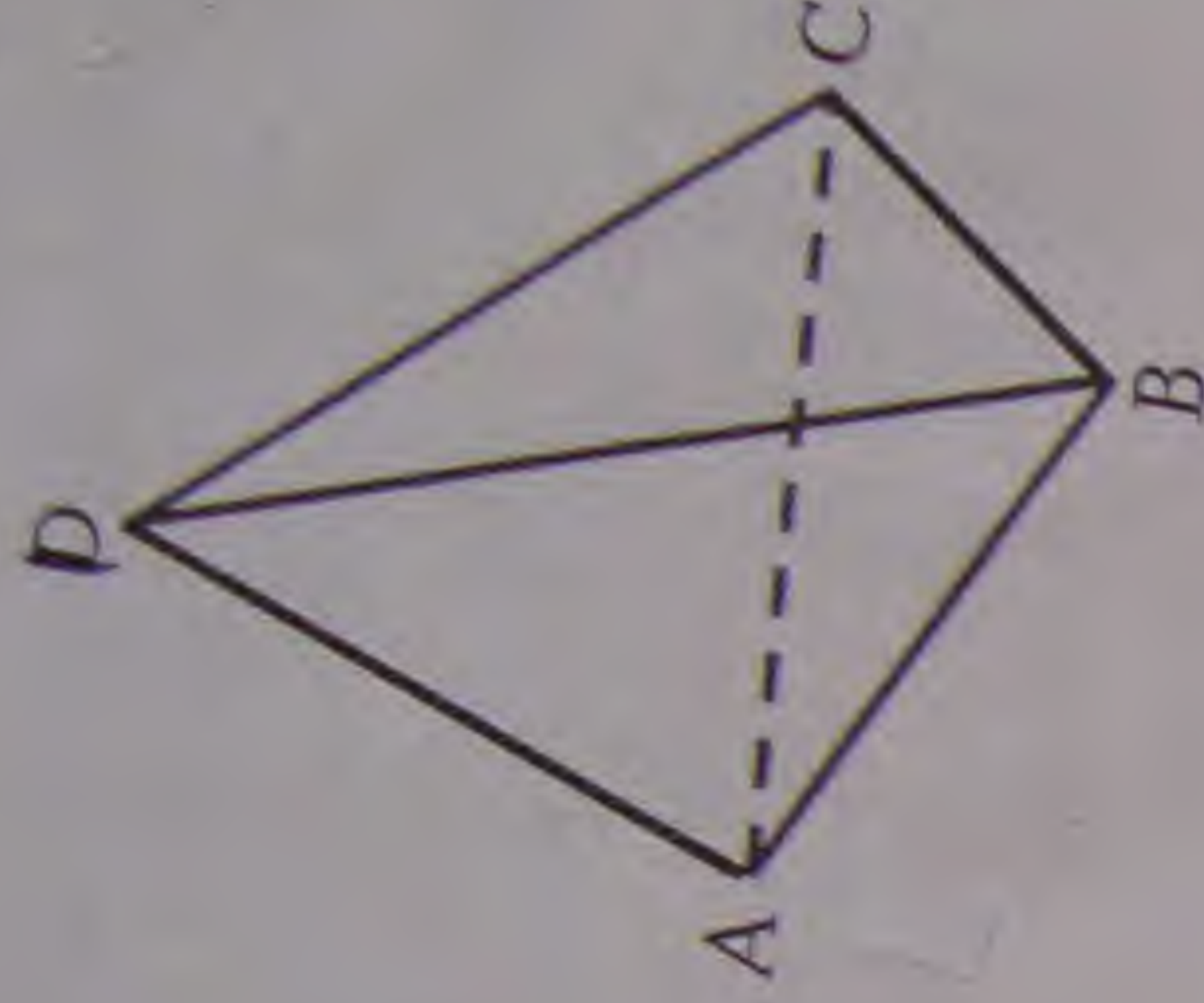
31,ա նկարում պատկերված է քառանկյուն բուրգ: Նրա մակերևույթը կազմված է  $ABCD$  քառանկյունից և  $EAB$ ,  $EBC$ ,  $ECD$ ,  $EDA$  եռանկյուններից, որոնք ունեն  $E$  ընդհանուր գագաթ: 31,բ նկարում պատկերված է եռանկյուն բուրգ, որը կոչվում է նաև *բառաճիստ*: Բուրգն այն բազմանիստն է, որի մակերևույթը կազմված է որևէ բազմանկյունից (դա կոչվում է *հիմք*) և ընդհանուր գագաթ ունեցող եռանկյուններից,





ա)

Նկ. 31



բ)

որոնց ընդհանուր գագաթի հանդիպակաց կողմերը տվյալ բազմանկյան (հիմքի) կողմերն են: Այդ եռանկյունները կոչվում են բուրգի կողմնային նիստեր, որանց ընդհանուր գագաթը՝ բուրգի գագաթ: Բուրգի գագաթը հիմքի բազմանկյան գագաթներին միացնող հատվածները կոչվում են կողմնային կողեր, իսկ գագաթի հանդիպակաց կողմերը՝ հիմքի կողեր:

Բուրգը, կախված հիմքի բազմանկյան կողմերի թվից, կոչվում է եռանկյուն բուրգ, քառանկյուն բուրգ, հնգանկյուն բուրգ և այլն: Բուրգը նշանակելու համար սկզբում գրվում է գագաթի տառը, այնուհետև հիմքի բազմանկյան գագաթների տառերը: Նկար 28-ում պատկերված բուրգերը նշանակվում են՝  $EABCD(a)$  և  $DABC(p)$ :

$n$  անկյուն բուրգն ունի  $2n$  կող, որոնցից  $n$ -ը հիմքի կողեր են,  $n$ -ը՝ կողմնային կողեր: Այդպիսի բուրգն ունի  $n+1$  գագաթ և  $n+1$  նիստ, ընդ որում՝ նիստերից մեկը հիմքն է, իսկ  $n$ -ը կողմնային նիստերն են:

Առանձնահատուկ է եռանկյուն բուրգը. նրա հիմքը ևս եռանկյուն է, այսինքն՝ նրա մակերևույթը կազմված է չորս եռանկյուններից: 31,բ նկարում պատկերված եռանկյուն բուրգի հիմքը  $ABC$  եռանկյունն է, բուրգի գագաթը՝  $D$ -ն: Այդ նույն բուրգը կարելի է դիտել այլ դիրքից ևս. օրինակ, եթե որպես հիմք դիտենք  $BDC$  եռանկյունը, ապա  $ABCD$  բուրգի գագաթը  $A$ -ն է:

### Չարդեր և խնդիրներ

90.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  զուգահեռանիստի մեջ. ա) գտեք  $B_1 C_1$ -ը և  $DC$ -ն, եթե  $BC=5$ սմ,  $A_1 B_1=4$ սմ, բ) գտեք զուգահեռանիստի  $BC$ ,  $CD$ ,  $CC_1$  կողերը, եթե  $AB=a$ ,  $AA_1=b$ ,  $AD=c$ :



91. գտեք վեցանկյուն պրիզմայի կողերի, գագաթների, նիստերի թվերը:

92. Կարո՞ղ է պրիզմայի կողերի թիվը լինել. **ա)** 13, **բ)** 14, **գ)** 18: Պատասխանը հիմնավորեք:

93. Կարո՞ղ է պրիզմայի նիստերի թիվը լինել. **ա)** 13, **բ)** 14, **գ)** 18: Պատասխանը հիմնավորեք:

94. Ի՞նչ բազմանկյուն է պրիզմայի հիմքը, եթե պրիզման ունի. **ա)** 18 կող, **բ)** 24 կող, **գ)** 9 նիստ:

95. 48 սմ երկարությամբ մետաղաձողը բաժանել են հավասար մասերի, և այդ մասերը ընդունելով որպես կողեր՝ պատրաստել են խորանարդ: գտեք այդ խորանարդի կողի երկարությունը:

96. խորանարդի նիստերից մեկի պարագիծը 32 սմ է: գտեք այդ խորանարդի բոլոր կողերի երկարությունների գումարը:

97. խորանարդի ներսում վերցված է  $M$  կետը և այն հատվածներով միացված է խորանարդի բոլոր գագաթներին: գտեք այն բուրգերի քանակը, որոնց գագաթը  $M$  կետն է:

98. վեցանկյուն պրիզմայի ներսում վերցված է  $M$  կետը, և այն հատվածներով միացված է պրիզմայի բոլոր գագաթներին: գտեք այն բուրգերի քանակը, որոնց գագաթը  $M$  կետն է: Ինչպիսի՞ բուրգեր են ստացվել և յուրաքանչյուրից քանի՞ հատ:

99. գտեք 8-անկյուն բուրգի կողերի, նիստերի և գագաթների թվերը:

100. Ինչպե՞ս է կոչվում բուրգը, եթե այն ունի. **ա)** 13 նիստ, **բ)** 10 գագաթ, **գ)** 12 կող:

101. Կարո՞ղ է լինել այնպիսի բուրգ, որն ունի. **ա)** 9 նիստ, **բ)** 9 կող: Պատասխանը հիմնավորեք:

102. Քառանկյուն բուրգի հիմքը 64 սմ պարագծով քառակուսի է, իսկ կողմնային նիստերը հավասարակողն եռանկյուններ են: գտեք բուրգի կողմնային կողերը:

103. Եռանկյուն՝ բուրգի կողմնային նիստերը ընդհանուր գագաթ ունեցող հավասարապարուն ուղղանկյուն եռանկյուններ են: Ապացուցեք, որ բուրգի հիմքը հավասարակողն եռանկյուն է:

### գլուխ VI-ի կրկնություններ

1. Բացատրեք, թե որ պատկերն է կոչվում բազմանկյուն: Ի՞նչ են բազմանկյան գագաթը, կողմերը, անկյունագծերը և պարագիծը:

2. Ո՞ր բազմանկյուններն են կոչվում ուռուցիկ: Բացատրեք, թե որ անկյուններն են կոչվում ուռուցիկ բազմանկյան անկյուններ:

3. Կրտածեք բանաձև ուռուցիկ  $n$ -անկյան անկյունների գումարը հաշվելու համար:



4. Գծագրեր քառանկյուն և ցույց տվեք նրա անկյունագծերը, հանդիպակաց կողմերը, հանդիպակաց գագաթները և անկյունները:
5. Ինչի՞ է հավասար ուռուցիկ քառանկյան անկյունների գումարը:
6. Սահմանեք զուգահեռագիծը: Զուգահեռագիծը արդյո՞ք ուռուցիկ քառանկյուն է:
7. Ապացուցեք, որ զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմերը հավասար են, և հանդիպակաց անկյունները հավասար են:
8. Ապացուցեք, որ զուգահեռագծի անկյունագծերը հաստման կետով կիսվում են:
9. Ձևակերպեք և ապացուցեք զուգահեռագծի հայտանիշները:
10. Ի՞նչ է եռանկյան միջին գիծը: Ձևակերպեք և ապացուցեք եռանկյան միջին գծի հատկությունը:
11. Ձևակերպեք Թալեսի թեորեմը: Ինչպե՞ս են տրված հատվածը բաժանում տրված թվով հավասար մասերի:
12. Ո՞ր քառանկյունն է կոչվում սեղան: Ինչպե՞ս են կոչվում սեղանի կողմերը:
13. Ո՞ր սեղանն է կոչվում հավասարասրուն, ո՞ր՝ ուղղանկյուն:
14. Ի՞նչ է սեղանի միջին գիծը: Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեմ սեղանի միջին գծի մասին:
15. Ո՞ր քառանկյունն է կոչվում ուղղանկյուն: Ապացուցեք, որ ուղղանկյան անկյունագծերը հավասար են:
16. Ապացուցեք, որ եթե զուգահեռագծի անկյունագծերը հավասար են, ապա այն ուղղանկյուն է:
17. Ո՞ր քառանկյունն է կոչվում շեղանկյուն: Ապացուցեք, որ շեղանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց են և դրանք շեղանկյան անկյունները կիսում են:
18. Ո՞ր քառանկյունն է կոչվում քառակուսի: Ձևակերպեք քառակուսու հիմնական հատկությունները:
19. Ո՞ր երկու կետերն են կոչվում համաչափ՝ տրված ուղղի նկատմամբ:
20. Ո՞ր պատկերն է կոչվում համաչափ՝ տրված ուղղի նկատմամբ:
21. Ո՞ր երկու կետերն են կոչվում համաչափ՝ տրված կետի նկատմամբ:
22. Ո՞ր պատկերն է կոչվում համաչափ՝ տրված կետի նկատմամբ:
23. Բերեք պատկերների օրինակներ, որոնք օժտված են. ա) առանցքային համաչափությամբ, բ) կենտրոնային համաչափությամբ, գ) առանցքային և կենտրոնային համաչափությամբ:
24. Նկարագրեք, թե ինչ պատկեր է բազմանիստը, բերեք բազմանիստի օրինակ և նշեք նրա նիստերը, կողերը, գագաթները:
25. Բացատրեք, թե ինչ կանոններից եք օգտվում տարածական պատկերները գծագրելիս:



26. Նկարագրեք, թե ինչ է զուգահեռանիստը: Քանի՞ միստ, քանի՞ կող  
և քանի՞ գագաթ ունի զուգահեռանիստը:
27. Նկարագրեք, թե ինչ են ուղղանկյունանիստը և խորանարդը: Ինչ-  
պիսի միատերից է կազմված խորանարդի մակերևույթը:
28. Նկարագրեք, թե ինչ է պրիզման: Քանի՞ կող, քանի՞ միստ, քանի՞  
գագաթ ունի  $n$ -անկյան պրիզման:
29. Նկարագրեք, թե ինչ է բուրգը: Ի՞նչ են բուրգի կողմնային միստերը:  
Քանի՞ կող և քանի՞ գագաթ ունի  $n$ -անկյուն բուրգը:

## Լրացուցիչ խնդիրներ

104. Ապացուցեք, որ եթե ուռուցիկ քառանկյան ոչ բոլոր անկյուններն  
են իրար հավասար, ապա դրանցից գոնե մեկը բութ է:
105.  $ABCD$  զուգահեռագծի պարագիծը 46սմ է,  $AB=14$ սմ: Ջուգա-  
հեռագծի ո՞ր կողմն է հատում  $A$  անկյան կիսորդը: Գտեք այն  
հատվածները, որոնք առաջանում են այդ հատման դեպքում:
106. Ջուգահեռագծի կողմերը հավասար են 10սմ և 3 սմ: Մեծ կողմին  
առընթեր անկյունների կիսորդները հանդիպակաց կողմը տրո-  
հում են երեք հատվածի: Գտեք այդ հատվածները:
107. Յակասարսրուն եռանկյան հիմքի կանայական կետով տարված  
են եռանկյան սրունքներին զուգահեռ ուղիղներ: Ապացուցեք, որ  
ստացված քառանկյան պարագիծը հավասար է տրված եռան-  
կյան սրունքների գումարին:
108. Անհավասար կից կողմեր ունեցող զուգահեռագծի մեջ տարված  
են անկյունների կիսորդները: Ապացուցեք, որ նրանց հատումից  
առաջանում է ուղղանկյուն:
109. Ապացուցեք, որ ուռուցիկ քառանկյունը զուգահեռագիծ է, եթե  
նրա երկու կից կողմներից յուրաքանչյուրին առընթեր անկյունների  
գումարը  $180^\circ$  է:
110. Ապացուցեք, որ ուռուցիկ քառանկյունը զուգահեռագիծ է, եթե  
նրա հանդիպակաց անկյունները զույգ առ զույգ հավասար են:
111.  $K$  կետը  $ABC$  եռանկյան  $AM$  միջնագծի միջնակետն է:  $BK$  ուղիղը  
 $D$  կետում հատում է  $AC$  կողմը: Ապացուցեք, որ  $AD=\frac{1}{3}AC$ :
112.  $M$  և  $N$  կետերը  $ABCD$  զուգահեռագծի  $AD$  և  $BC$  կողմերի միջ-  
նակետերն են: Ապացուցեք, որ  $AN$  և  $MC$  ուղիղները  $BD$  ան-  
կյունագիծը բաժանում են երեք հավասար մասի:
113.  $ABCD$  շեղանկյան  $B$  գագաթից տարված են  $AD$  և  $DC$  ուղիղ-  
ներին ուղղահայացներ  $BK$ -ն և  $BM$ -ը: Ապացուցեք, որ  $BD$  ճառա-  
գայթը  $KBM$  անկյան կիսորդն է:



- 114.** Ապացուցեք, որ շեղանկյան անկյունագծերի հատման կետը հավասարաչափ է նրա կողմերից:
- 115.** Ապացուցեք, որ եռանկյան գագաթը հանդիպակաց կողմի կամահատվածի վրա, որի ծայրակետերը մյուս երկու կողմերի միջնակետերն են:
- 116.**  $ABCD$  քառակուսու  $AC$  անկյունագիծը  $18,4$  սմ է:  $A$  կետով ուղղին ուղղահայաց ուղիղը հատում է  $BC$  և  $CD$  ուղիղները՝ համապատասխանաբար  $M$  և  $N$  կետերում: Գտեք  $MN$ -ը:
- 117.**  $ABCD$  քառակուսու  $AC$  անկյունագծի վրա  $M$  կետը վերցված է հայաց ուղիղ, որը  $BC$ -ն հատում է  $AC$  ուղղին ուղղահայաց  $BH=HM=MC$ :
- 118.**  $AD$  մեծ հիմքով  $ABCD$  սեղանի  $AC$  անկյունագիծը ուղղահայաց է  $CD$  սրունքին:  $\angle BAC = \angle CAD$ : Գտեք  $AD$ -ն, եթե սեղանի պարագիծը  $20$  սմ է, իսկ  $\angle D = 60^\circ$ :
- 119.** Սեղանի հիմքերից մեկին առընթեր անկյունների գումարը  $90^\circ$  է: Ապացուցեք, որ սեղանի հիմքերի տարբերությունը կրկնակի մեծ է դրանց միջնակետերը միացնող հատվածից:
- 120.** Ապացուցեք, որ զուգահեռագծի անկյունագծերի հատման կետը նրա համաչափության կենտրոնն է:
- 121.** Համաչափության քանի՞ կենտրոն ունի զուգահեռ ուղիղների զույգը:
- 122\*.** Ապացուցեք, որ եթե պատկերն ունի համաչափության երկու փոխուղղահայաց առանցքներ, ապա դրանց հատման կետը այդ պատկերի համաչափության կենտրոնն է:



## ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ

§ 1 ԼԱՐԻ ՄԻՋՆԱԿԵՏՈՎ ԱՆՅՆՈՂ  
ՇԱՌԱՎԻՈՂ

**17** **Երկու կետերով անցնող շրջանագիծը:** Շրջանագիծը և նրա մի քանի հատկությունները դուք արդեն ուսումնասիրել եք 6-րդ դասարանում: Հիշենք, որ շրջանագիծն այն երկրաչափական պատկերն է, որը կազմված է հարթության բոլոր այն կետերից, որոնք գտնվում են տրված կետից տրված հեռավորության վրա: Տրված կետը շրջանագծի կենտրոնն է, իսկ տրված հեռավորությունը հավասար է շառավիղի երկարությանը:

Եշենք, որ շրջանագիծը որոշելու կամ կառուցելու համար կարևոր է որոշել նրա կենտրոնը և շառավիղը:

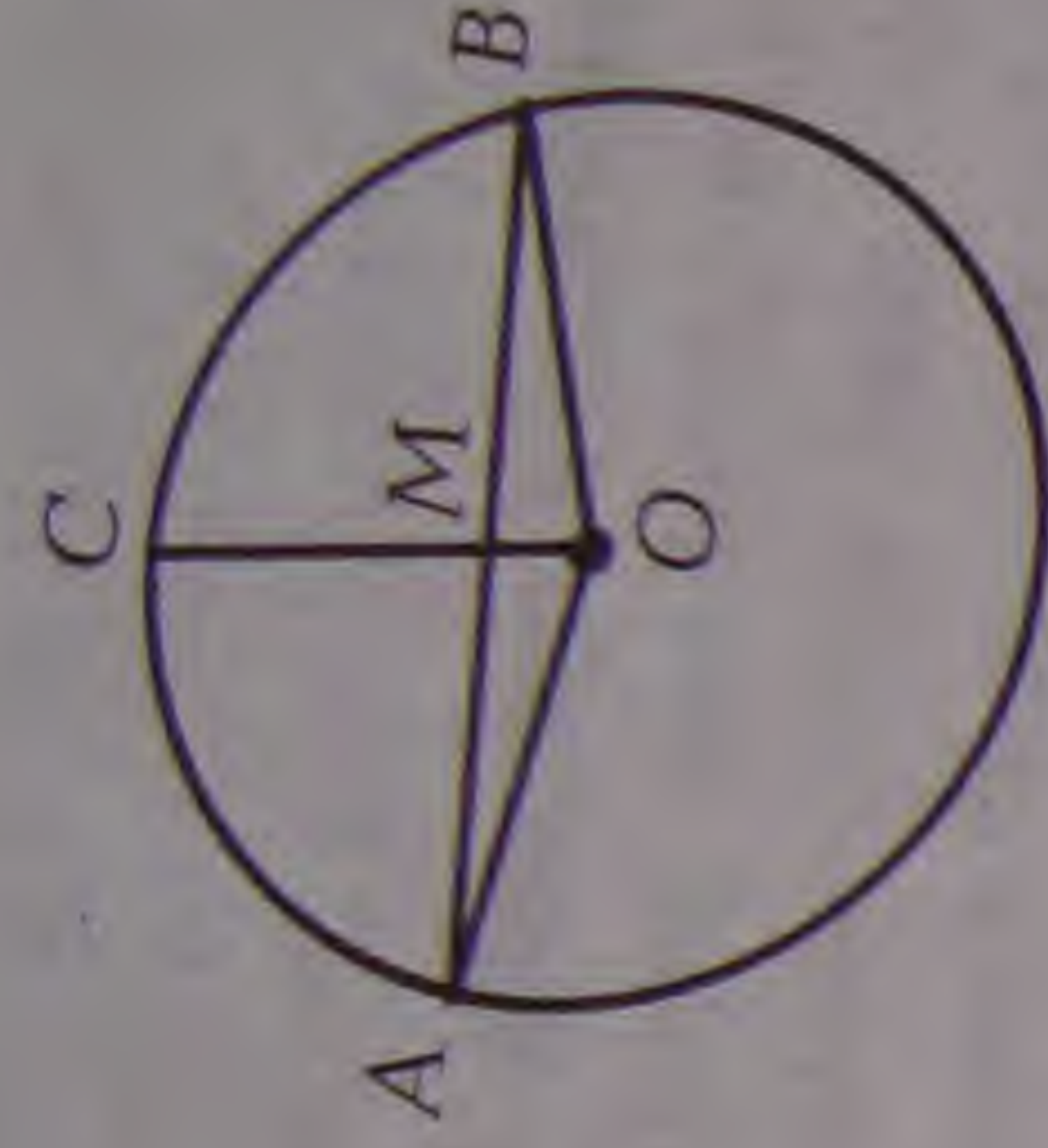
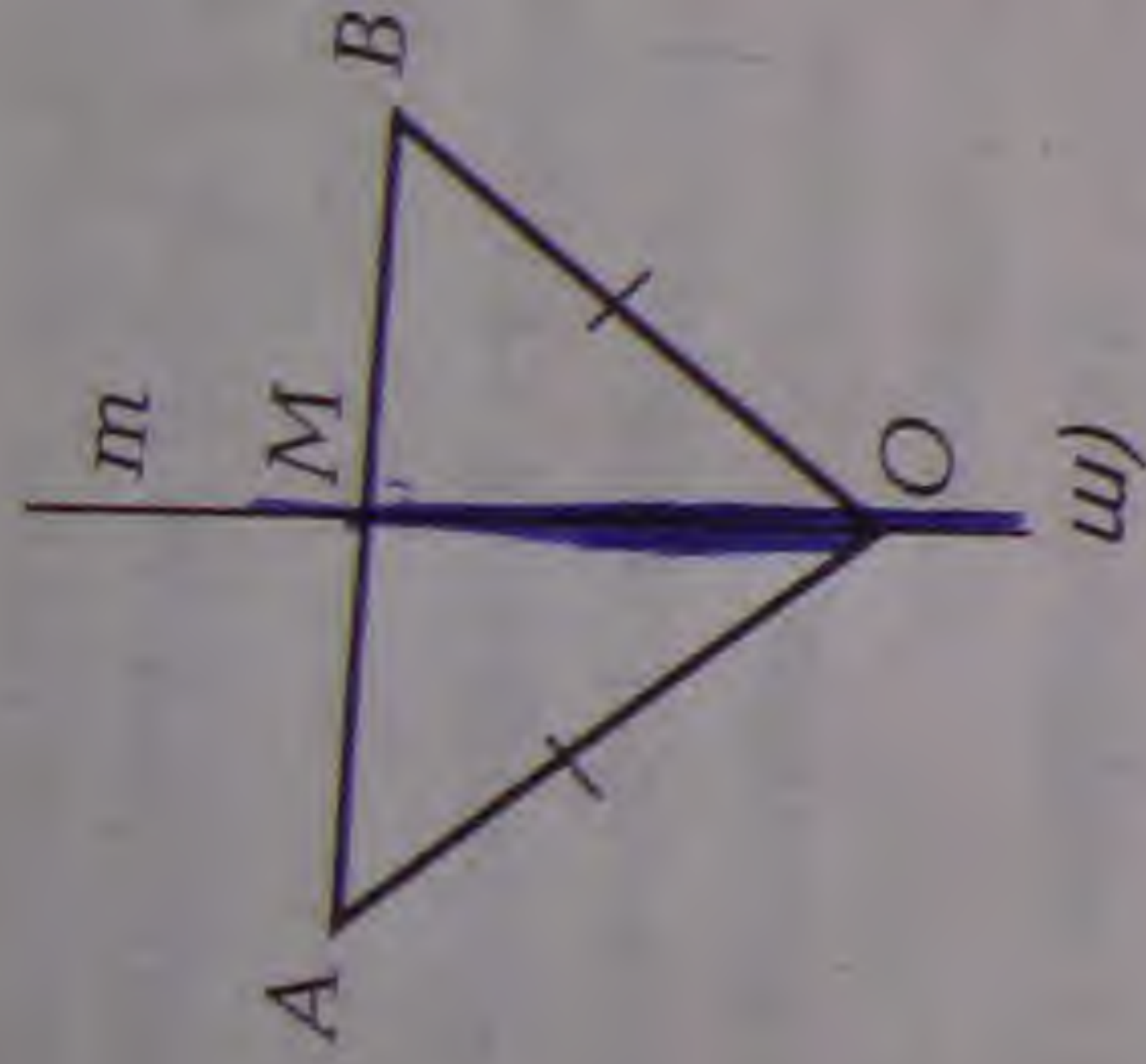
Պարզաբանենք այն հարցը, թե կարո՞ղ ենք ստանալ շրջանագիծ, եթե տրված են երկու կետ, որոնցով այն անցնում է:

Եսիս հիշենք հատվածի միջնուղղահայացի հատկությունը (հատվածին միջնուղղահայաց կառուցելը դուք գիտեք 6-րդ դասարանի դասընթացից): Հատվածի միջնուղղահայացի յուրաքանչյուր կետ հավասարահեռ է այդ հատվածի ծայրակետերից: Այժմ մենք ցույց տանք, որ տեղի ունի նաև հակադարձ պնդումը, այն է. *հատվածի ծայրակետերից հավասարահեռ յուրաքանչյուր կետ գտնվում է այդ հատվածի միջնուղղահայացի վրա:*

Դիտենք կանայական  $O$  կետ, որը հավասարահեռ է  $AB$  հատվածի ծայրակետերից.  $OA=OB$  (նկ. 32,ա): Դիցուք՝  $M$ -ը  $AB$  հատվածի միջնակետն է, և այդ կետով անցնող  $m$  ուղիղը ուղղահայաց է  $AB$ -ին: Ցույց տանք, որ  $O$  կետը գտնվում է  $m$  ուղղի վրա:

Եթե  $O$  կետը գտնվում է  $AB$  ուղղի վրա, և  $AO=OB$ , ապա պարզ է, որ  $O$  կետը համընկնում է  $M$  կետին և, ուրեմն, գտնվում է  $m$  ուղղի վրա:





Նկ. 32

բ)

Եթե  $O$  կետը չի գտնվում  $AB$  ուղղի վրա, ապա  $A$ ,  $B$  և  $O$  կետերով կարելի է կառուցել եռանկյուն: Դիտենք  $AOB$  հավասարասրուն եռանկյունը ( $AO=OB$ ), որի  $AB$  հիմքին տարված միջնագիծը  $OM$ -ն է: Հետևաբար՝  $OM$  հատվածը մաս բարձրությունն է.  $OM \perp AB$ : Ըստ ուղղին տրված կետով անցնող ուղղահայացի միակության՝  $MO$  ուղիղը և  $m$  ուղիղը համընկնում են, այսինքն՝  $O$  կետը գտնվում է  $m$  միջնուղղահայացի վրա:

Այժմ վերադառնանք մեր սկզբնական խնդրին: Եթե տրված են երկու՝  $A$  և  $B$  կետեր, ապա այդ ծայրակետերով  $AB$  հատվածի միջնուղղահայացի վրա վերցված յուրաքանչյուր կետ կարող է դիտվել որպես մի շրջանագծի կենտրոն, որն անցնում է այդ երկու կետերով: Բայց քանի որ հատվածի միջնուղղահայացի վրա գտնվում են անվերջ շատ կետեր, ուրեմն տրված երկու կետերով անցնող շրջանագծերը ևս անվերջ շատ են:

**18) Լարի միջնակետով անցնող շառավիղը:** Պարզաբանենք հաճախակի կիրառություն ունեցող մի հարց. միմյանց նկատմամբ ինչպե՞ս են դասավորված շրջանագծի՝ տրանագիծ չհանդիսացող լարը և նրա միջնակետով անցնող շառավիղը:

Դիցուք՝  $O$  կենտրոնով շրջանագծի  $OC$  շառավիղն անցնում է  $AB$  լարի  $M$  միջնակետով (Նկ. 32,բ): Քանի որ շրջանագիծն անցնում է  $AB$  հատվածի ծայրակետերով, ապա շրջանագծի  $O$  կենտրոնը գտնվում է  $AB$  հատվածի միջնուղղահայացի վրա: Դրանից հետևում է, որ  $OM$  ուղիղը, ուրեմն մաս  $OC$  շառավիղը ուղղահայաց է  $AB$  լարին: Նմանապես կարելի է ցույց տալ, որ եթե  $OC$  շառավիղը ուղղահայաց է  $AB$  լարին և նրա հետ հատվում է  $M$  կետում, ապա  $M$ -ը  $AB$  հատվածի միջնակետն է:



Այսպիսով. ա)լարի միջնակետով անցնող շառավիղը ուղղահայաց է այդ լարին. և բ)լարը հատող և նրան ուղղահայաց շառավիղն անցնում է այդ լարի միջնակետով:

**15) Շրջանագծի որոշումը երեք կետերով:** Պարզաբանենք, թե ինչպես է որոշվում այն շրջանագիծը, որն անցնում է տրված երեք կետերով: Հարցն այն է, թե կարելի՞ է, արդյոք, շրջանագիծ տանել երեք կետերի ցանկացած դասավորության դեպքում:

Դիցուք տրված են երեք  $A, B$  և  $C$  կետեր, և պահանջվում է գտնել այնպիսի  $O$  կետ, որը հավասարախեռ է այդ երեք կետերից: Դա նույնն է, որ գտնենք այնպիսի  $O$  կետ, որը կարող է դիտվել որպես այդ երեք կետերով անցնող շրջանագծի կենտրոն:

Մենք արդեն գիտենք, որ  $A$  և  $B$  կետերով անցնող յուրաքանչյուր շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է  $AB$  հատվածի  $m$  միջնուղղահայացի վրա: Նմանապես,  $BC$  հատվածի  $n$  միջնուղղահայացի վրա է գտնվում  $B$  և  $C$  կետերով անցնող յուրաքանչյուր շրջանագծի կենտրոնը: Ուրեմն՝ որպեսզի շրջանագիծն անցնի  $A, B$  և  $C$  կետերով, նրա կենտրոնը միաժամանակ գտնվելու է ինչպես  $m$ , այնպես էլ  $n$  ուղղի վրա:

Քննարկենք երկու դեպք.

1)  $A, B$  և  $C$  կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա: Այս դեպքում  $m$  և  $n$  ուղիղները զուգահեռ են՝ որպես միևնույն ուղղին ուղղահայաց ուղիղների: Այն, որ  $m$  և  $n$  ուղիղները չեն հատվում, նշանակում է, որ գոյություն չունի այնպիսի կետ, որը հավասարախեռ է մի ուղղի վրա գտնվող կետերը չեն կարող գտնվել մի շրջանագծի վրա:

2)  $A, B$  և  $C$  կետերը մի ուղղի վրա չեն գտնվում: Այս դեպքում  $m$  և  $n$  ուղիղները հատվում են ինչ որ մի  $O$  կետում, և  $OA=OB, OB=OC$  (նկ. 33): Օգտվելով վերոհիշյալ հավասարություններից ստանում ենք, որ  $OA=OC$ : Այսինքն  $O$  կետը հավասարախեռ է նաև  $A$  և  $C$  կետերից, ուստի  $O$  կետը գտնվում է  $AC$  հատվածի  $p$  միջնուղղահայացի վրա ևս: Հենց  $O$  կետն էլ այն շրջանագծի կենտրոնն է, որն անցնում է  $A, B$  և  $C$  կետերով:



Նկ. 33



Այսպիսով ա) մի ուղղի վրա գտնվող երեք կետերով շրջանագիծ չի անցնում, բ) մի ուղղի վրա չգտնվող երեք կետերով անցնում է մի շրջանագիծ, որի կենտրոնը այդ կետերը միացնող հատվածներից օրև է երկուսի միջնուղղահայացների հատման կետն է:

Բերված դատողություններից օգտվելով՝ կարող ենք նկարագրել, թե ինչպես կառուցել մի ուղղի վրա չգտնվող երեք կետերով անցնող շրջանագիծը: Դրա համար անհրաժեշտ է. ա) տանել այդ կետերը միացնող հատվածներից որևէ երկուսը, բ) կառուցել այդ հատվածների միջնուղղահայացները և գտնել դրանց հատման կետը (շրջանագծի կենտրոնը), գ) կարկինի ծայրակետը դնել կենտրոնի վրա, տալ բացվածք՝ կենտրոնից մինչև տրված կետերից որևէ մեկի հեռավորության չափով և գծել շրջանագիծը:

### Չարցեր և խնդիրներ

**123.** Ապացուցեք, որ հատվածի ծայրակետերով անցնող շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է այդ հատվածի համաչափության առանցքի վրա:

**124.** Ապացուցեք, որ շրջանագծի կենտրոնից ելնող ճառագայթը շրջանագիծը հատում է մեկ կետում:

**125.** Կառուցեք տրված շառավիղով շրջանագիծ, որն անցնի տրված երկու կետերով: Այդպիսի բանի՞ շրջանագիծ է հնարավոր կառուցել: Խնդիրը արդյոք մի՞շտ լուծում ունի:

**126.** Տրված ուղղի վրա գտեք այն կետը, որը հավասարախեռ է տրված երկու կետերից: Դիտարկեք բոլոր հնարավոր դեպքերը:

**127.** Տրված են մի շրջանագծի վրա գտնվող երեք կետ: Ապացուցեք, որ այդ կետերը չեն գտնվում մի ուղղի վրա:

**128.** Պարզաբանեք, թե հատվածի և կետի ինչպիսի՞ դասավորության դեպքում է հնարավոր տանել շրջանագիծ, որն անցնի տվյալ կետով և հատվածի ծայրակետերով:

**129.** Նկարագրեք չորս կետերի դասավորության որևէ դեպք, երբ այդ կետերով անցնող շրջանագիծ. ա) գոյություն ունի, բ) գոյություն չունի:

**130.**  $AB$  հատվածի  $A$  ծայրակետը գտնվում է  $O$  կենտրոնով շրջանագծի վրա: Գայտնի է, որ  $OAB$  անկյունը փոքր է  $OBA$  անկյունից: Ապացուցեք, որ  $B$  կետը չի գտնվում այդ շրջանագծի վրա:

**131.**  $AB$  հատվածը  $O$  կենտրոնով շրջանագծի տրամագիծն է, իսկ  $AC$ -ն և  $BC$ -ն՝ այդ շրջանագծի հավասար լարերը: Գտեք  $AOC$  անկյունը:



132.  $O$  կենտրոնով շրջանագծի  $A$  կետով տարված են  $AB$  տրամագիծը և  $AC$  լարը: գտեք  $BC$  լարը, եթե հայտնի է, որ  $OK = 4\text{սմ}$ , որտեղ  $K$ -ն  $AC$  լարի միջնակետն է:

133.  $A$ ,  $B$  և  $C$  կետերով անցնող շրջանագծի կենտրոնը  $AB$  հատվածի միջնակետն է: Ապացուցեք, որ  $ACB$  անկյունը ուղիղ է:

134.  $A$ ,  $B$  և  $C$  կետերով անցնող շրջանագծի կենտրոնը  $AB$  հատվածի միջնակետն է: գտեք  $ABC$  անկյունը, եթե  $AC$  լարի երկարությունը հավասար է շրջանագծի շառավիղին:

135. Ապացուցեք, որ մի ուղիղ վրա գտնվող 3 կամ և՛ ավելի թվով կետերով շրջանագիծ չի անցնում:

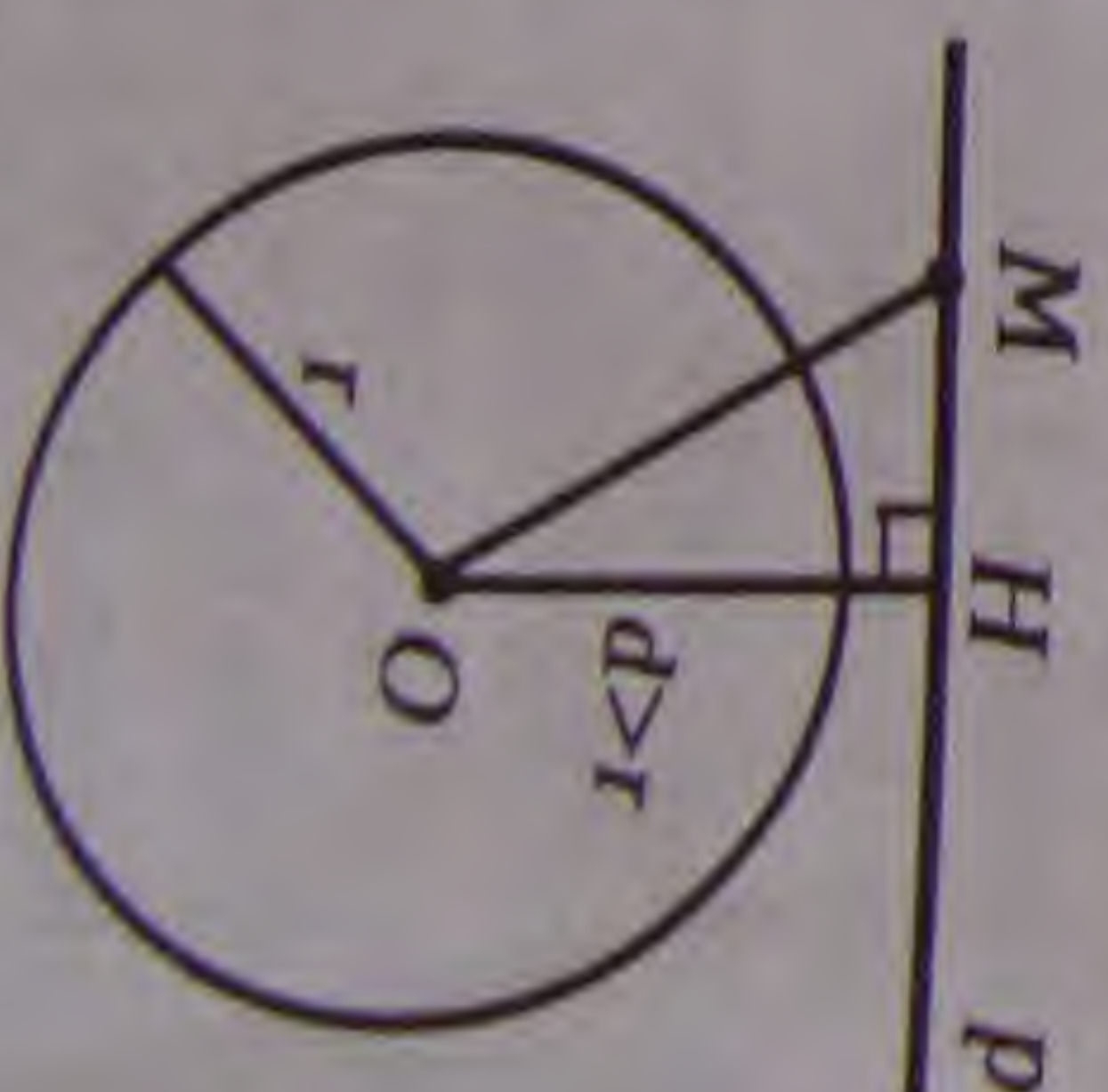
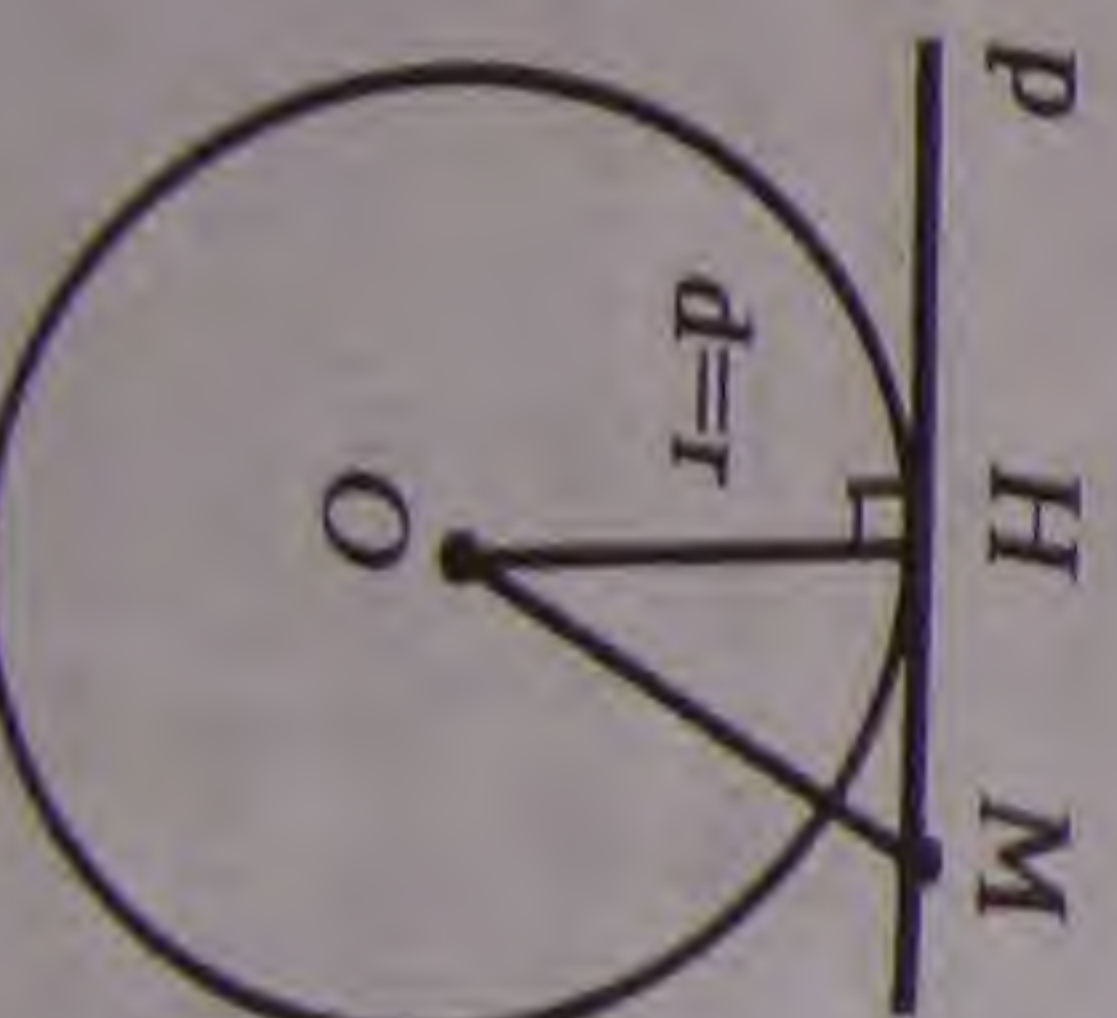
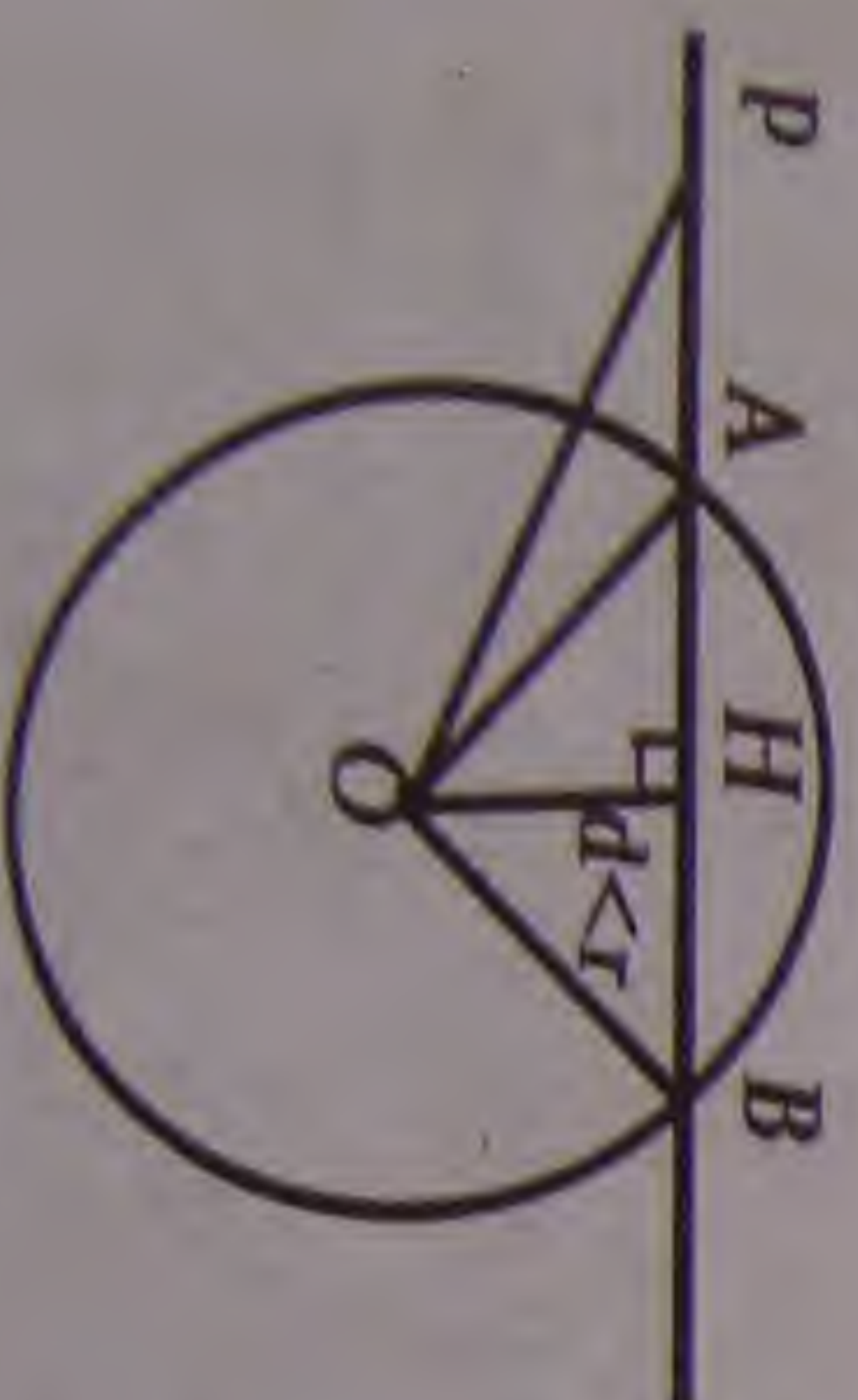
## § 2 ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՇՈՇԱՓՈՂ

20) **Շրջանագծի և ուղղի փոխադարձ դասավորությունը:** Պարզաբանենք, թե բանի՞ ընդհանուր կետ կարող են ունենալ շրջանագիծը և ուղիղը՝ կախված նրանց փոխադարձ դասավորությունից:

Պարզ է, որ եթե ուղիղն անցնում է շրջանագծի կենտրոնով, ապա այն շրջանագիծը հատում է երկու կետում, այն է՝ տվյալ ուղիղի վրա գտնվող տրամագծի ծայրակետերում:

Պիցուք՝  $P$  ուղիղը չի անցնում  $r$  շառավիղով շրջանագծի  $O$  կենտրոնով: Տանենք  $P$  ուղղին  $OH$  ուղղահայացը և այդ ուղղահայացի երկարությունը, այն է՝  $O$  կենտրոնից  $P$  ուղղի հեռավորությունը, նշանակենք  $d$  (նկ. 34): Ուղի և շրջանագծի փոխադարձ դասավորությունը հետազոտենք՝ համեմատելով  $d$ -ն և  $r$ -ը: Պիտարիկենք երեք դեպք:

1)  $d < r$ : Այս դեպքում  $P$  ուղղին  $O$  կետից տարված  $OH$  ուղղահայացը փոքր է  $r$ -ից: Այսու կողմից՝ նույն  $O$  կետից  $P$  ուղղին կարելի է



ա)

բ)

գ)

Նկ. 34



տանել  $d$ -ից մեծ ցանկացած երկարությամբ թեքեր: Ուրեմն՝ կարող ենք պատկերացնել, որ գոյություն ունի այնպիսի  $OA$  թեք, որի երկարությունը  $r$  է: Իսկ դա նշանակում է, որ  $A$  կետը գտնվում է շրջանագծի վրա: Բայց շրջանագծի վրա է գտնվում նաև  $A$  կետի համաչափ  $B$  կետը՝  $OH$  առանցքի նկատմամբ (կարող եք համոզվել, որ եթե  $HB=HA$ , ապա  $OH \perp AB$  և  $OHA$  ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են, և, ուրեմն,  $OB=OA=r$ ):

Ապացուցենք, որ  $p$  ուղիղը և տրված շրջանագիծը բացի նշված  $A$  և  $B$  կետերից ուրիշ ընդհանուր կետեր չունեն: Եթե ենթադրենք, որ դրանք ունեն ևս մեկ այլ ընդհանուր  $C$  կետ, ապա կստացվի, որ  $O$  կետը գտնվում է  $AC$  հատվածի միջնուղղահայացի վրա: Իսկ դրանից կհետևի, որ  $O$  կետից  $p$  ուղղին հնարավոր է տանել երկու ուղղահայաց, ինչը հնարավոր չէ:

Այսպիսով՝ եթե շրջանագծի կենտրոնից մինչև ուղիղը եղած հեռավորությունը փոքր է շրջանագծի շառավիղից ( $d < r$ ), ապա այդ ուղիղը և շրջանագիծը ունեն երկու ընդհանուր կետեր: Այդպիսի ուղիղը կոչվում է շրջանագծին հատող:

2)  $d=r$ : Այս դեպքում  $OH=r$ , այսինքն  $H$  կետը գտնվում է շրջանագծի վրա և, ուրեմն, այն շրջանագծի և ուղղի ընդհանուր կետ է (նկ. 34,բ):  $p$  ուղիղը և շրջանագիծը այլ ընդհանուր կետ չունեն: Ուղղի՝  $H$ -ից տարբեր յուրաքանչյուր  $M$  կետի համար  $OM > OH=r$  ( $OH$  ուղղահայացը փոքր է  $OM$  թեքից): Հետևաբար՝  $M$  կետը շրջանագծի վրա չի գտնվում:

Այսպիսով՝ եթե շրջանագծի կենտրոնից մինչև ուղիղը եղած հեռավորությունը հավասար է շրջանագծի շառավիղին, ապա ուղիղը և շրջանագիծը ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ:

3)  $d > r$ : Այս դեպքում  $OH > r$ , ուրեմն՝  $p$  ուղղի ցանկացած  $M$  կետի համար  $OM > OH > r$  (նկ. 34,գ): Հետևաբար՝  $M$  կետը շրջանագծի վրա չի գտնվում:

Այսպիսով՝ եթե շրջանագծի կենտրոնից մինչև ուղիղը եղած հեռավորությունը մեծ է շրջանագծի շառավիղից, ապա այդ ուղիղը և շրջանագիծը ընդհանուր կետ չունեն: ✓

**(21) Շրջանագծի շոշափող:** Մենք պարզաբանեցինք, որ ուղիղը և շրջանագիծը կարող են ունենալ մեկ կամ երկու ընդհանուր կետեր,



կարող են նաև չունենալ որևէ ընդհանուր կետ: Ուղիղը, որը շրջանագծի հետ ունի միայն մեկ ընդհանուր կետ, կոչվում է այդ շրջանագծի շոշափող, իսկ նրանց ընդհանուր կետը կոչվում է ուղղի և շրջանագծի շոշափման կետ: Նկար 35-ում  $P$  ուղիղը  $O$  կենտրոնով շրջանագծի շոշափող է, իսկ  $A$ -ն՝ շոշափման կետ:

Ապացուցենք թեորեմ շոշափողի հատկության մասին:



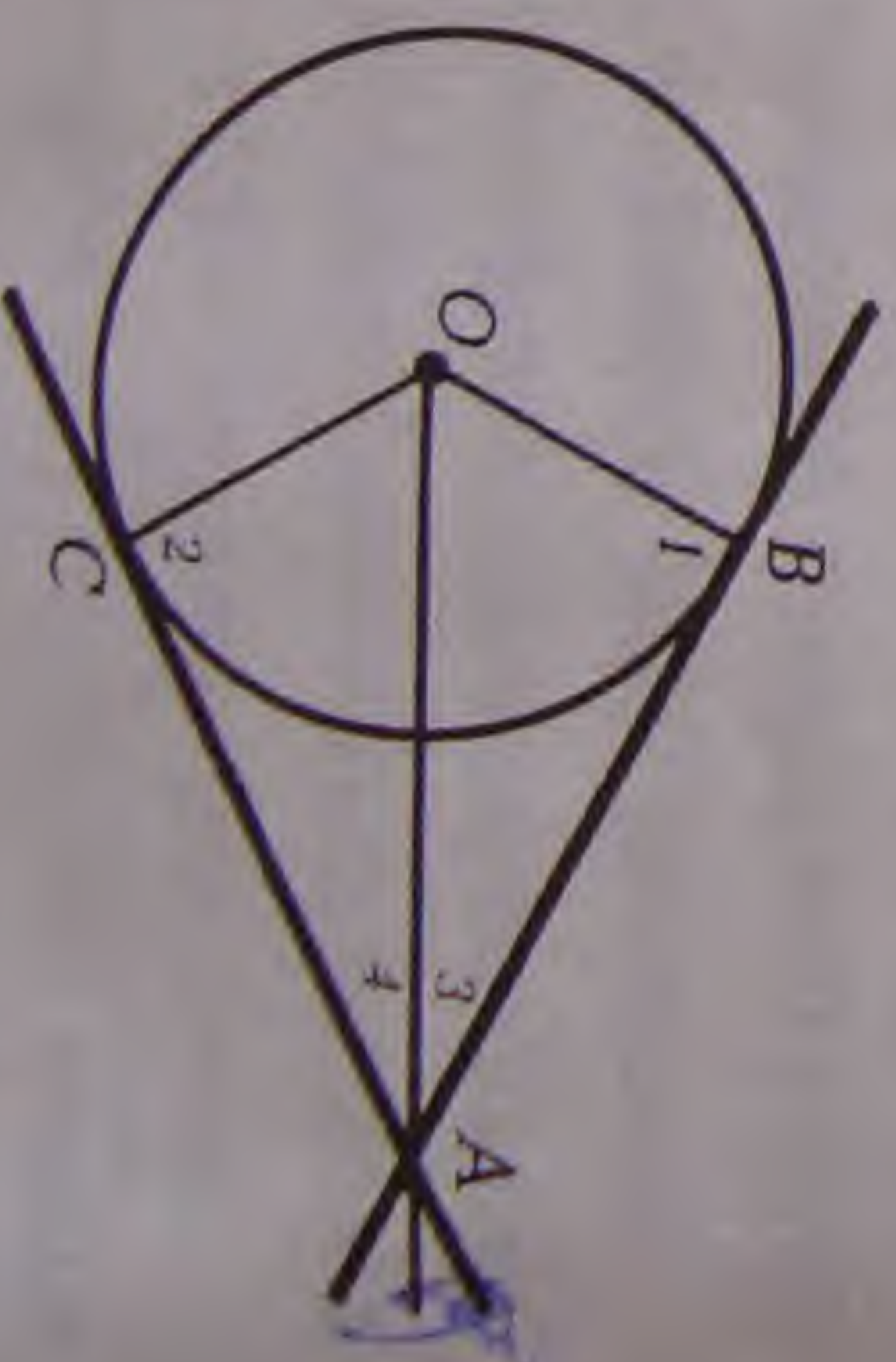
Թեորեմ: Շրջանագծի շոշափողն ուղղահայաց է շոշափման կետով տարված շառավիղին:

Նկ. 35

Ապացուցում: Դիցուք՝  $P$ -ն  $O$  կենտրոնով շրջանագծի շոշափողն է, իսկ  $A$ -ն՝ շոշափման կետը (տես նկ. 35): Ապացուցենք, որ  $P$  շոշափողը ուղղահայաց է  $OA$  շառավիղին: Ենթադրենք այդպես չէ: Այդ դեպքում  $OA$ -ն կլինի  $P$  ուղիղին տարված թեք: Քանի որ  $O$  կետից  $P$  ուղիղին տարված ուղղահայացը փոքր է  $OA$  թեքից, ապա ստացվում է, որ շրջանագծի  $O$  կենտրոնի հեռավորությունը  $P$  ուղիղից ավելի փոքր է, քան շառավիղը: Հետևաբար՝  $P$  ուղիղը և շրջանագիծը կունենան երկու ընդհանուր կետեր: Քայց դա հակասում է պայմանին, ըստ որի  $P$  ուղիղը շոշափող է: Այսպիսով՝  $P$  ուղիղը ուղղահայաց է  $OA$  շառավիղին:

Թեորեմն ապացուցված է: ✓

Դիտարկենք  $O$  կենտրոնով շրջանագծի երկու շոշափողներ, որոնք անցնում են  $A$  կետով և շրջանագիծը շոշափում են  $B$  և  $C$  կետերում (նկ. 36):  $AB$  և  $AC$  հատվածներն անկանենք  $A$  կետից տարված շոշափողների հատվածներ: Դրանք օժտված են հետևյալ հատկությամբ, որը բխում է ապացուցված թեորեմից:



Նկ. 36

Միևնույն կետից շրջանագծին տարված երկու շոշափողների հատվածները հավասար են և կազմում են հավասար անկյուններ այն ուղղի հետ, որն անցնում է այդ կետով և շրջանագծի կենտրոնով:



Այս պնդումն ապացուցելու համար դիտենք նկար 36-ը: Ըստ շոշափողի մասին թեորեմի՝ անկյուններ 1-ը և 2-ը ուղիղ են, ուրեմն՝  $ABO$  եռանկյունները ուղղանկյուն եռանկյուն են: Դրանք հավասար սար՝  $OB$  և  $OC$  էջեր: Հետևաբար՝  $OA$  ներքնաձիգ և հավափում էր ապացուցել:

Այժմ ապացուցենք շոշափողի հատկության մասին թեորեմի հակադարձ թեորեմը (շոշափողի հայտանիշը):

**Թեորեմ:** *Եթե ուղիղն անցնում է շառավիղի՝ շրջանագծի վրա գտնվող ծայրակետով և ուղղահայաց է այդ շառավիղին, ապա այն շոշափող է:*

Ապացուցում: Թեորեմի պայմանից հետևում է, որ այդ շառավիղը շրջանագծի կենտրոնից տվյալ ուղիին տարված ուղղահայացն է: Ուրեմն շրջանագծի կենտրոնից մինչև այդ ուղիղը եղած հեռավորությունը հավասար է շառավիղին: Հետևաբար՝ շրջանագիծը և այդ ուղիղը ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ: Բայց դա հենց նշանակում է, որ տվյալ ուղիղը շրջանագծի շոշափող է:

Թեորեմն ապացուցված է:

Այս թեորեմի հիման վրա լուծվում են շոշափողի կառուցման խնդիրները: Լուծենք այդպիսի խնդիրներից մեկը:

**Խնդիր:**  $O$  կենտրոնով շրջանագծի վրա տրված  $A$  կետով տանել այդ շրջանագծի շոշափող:

**Լուծում:** Տանենք  $OA$  ուղիղը, իսկ այնուհետև կառուցենք  $p$  ուղիղը, որն անցնում է  $A$  կետով և ուղղահայաց է  $OA$  ուղիին: Ըստ շոշափողի հայտանիշի՝  $p$  ուղիղը որոնելի շոշափողն է:

## Խնդիրներ

**136.** Դիցուք՝  $d$ -ն  $r$  շառավիղով շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունն է  $p$  ուղիղից: Ինչպե՞ս են միմյանց նկատմամբ դասավորված շրջանագիծը և  $p$  ուղիղը, եթե. **ա)**  $r = 16$ սմ,  $d = 12$ սմ, **բ)**  $r = 5$ սմ,  $d = 4,2$ սմ, **գ)**  $r = 7,2$ դմ,  $d = 3,7$ դմ, **դ)**  $r = 8$ սմ,  $d = 1,2$ դմ, **ե)**  $r = 5$ սմ,  $d = 50$ մմ:

**137.**  $A$  կետի և շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը փոքր է շրջանագծի շառավիղից: Ապացուցեք, որ  $A$  կետով անցնող յուրաքանչյուր ուղիղ այդ շրջանագծի հատող է:



138.  $ABC$  եռանկյան մեջ  $AB=10$ սմ,  $\angle C=90^\circ$ ,  $\angle B=30^\circ$ : Պահանջվում է տանել  $A$  կենտրոնով շրջանագիծ: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի այդ շրջանագծի շառավիղը, որպեսզի  $BC$  ուղիղը. **ա)** շոշափի շրջանագիծը, **բ)** շրջանագծի հետ չունենա ընդհանուր կետ, **գ)** շրջանագծի հետ ունենա ընդհանուր կետեր:

139. Տրված է  $ABCD$  բառակուսին, որի անկյունագիծը 6սմ է: Տանել շրջանագիծ, որի կենտրոնը լինի  $A$ -ն: Ի՞նչ երկարություն պետք է ունենա շրջանագծի շառավիղը, որպեսզի  $BD$  անկյունագիծն ընդգրկող ուղիղը լինի. **ա)** շրջանագծի շոշափող, **բ)** շրջանագծի հատող:

140.  $AB$  և  $CD$  հատվածները  $O$  կենտրոնով շրջանագծի տրամագծեր են: Հաշվեք  $\angle AOD$  եռանկյան պարագիծը, եթե հայտնի է, որ  $CB=13$ սմ,  $AB=16$ սմ:

141.  $O$  կենտրոնով շրջանագծի  $OM$  շառավիղն անցնում է  $AB$  լարի միջնակետով: Ապացուցեք, որ շրջանագծի  $M$  կետով տարված շոշափողը գուցա՛հեռ է  $AB$  լարին:

142. Շրջանագծի  $A$  կետով տարված են շոշափող և շառավիղին հավասար լար: Գտեք դրանց կազմած անկյունը:

143. Շրջանագծի շառավիղին հավասար  $AB$  լարի ծայրակետերով տարված են այդ շրջանագծի շոշափողներ, որոնք հատվում են  $C$  կետում: Գտեք  $ABC$  եռանկյան անկյունները:

144.  $AB$  տրամագծի և  $AC$  լարի կազմած անկյունը  $30^\circ$  է:  $C$  կետով տարված է շրջանագծի շոշափող, որը  $AB$  ուղիղը հատում է  $D$  կետում: Ապացուցեք, որ  $ACD$  եռանկյունը հավասարասրայուն է:

145.  $AB$  ուղիղը  $B$  կետում շոշափում է  $O$  կենտրոնով և  $r=1,5$ սմ շառավիղով շրջանագիծը: Գտեք  $ABO$  եռանկյան անկյունները, եթե  $AO=3$ սմ:

146. Տրված է  $O$  կենտրոնով և 4,5սմ շառավիղով շրջանագիծ:  $A$  կետն այնպիսին է, որ  $AO=9$ սմ:  $A$  կետով տարված են այդ շրջանագծի երկու շոշափողներ: Գտեք դրանց կազմած անկյունը:

147.  $AB$ -ն և  $AC$ -ն  $O$  կենտրոնով շրջանագծին  $A$  կետից տարված շոշափողների հատվածներն են: Գտեք  $BAC$  անկյունը, եթե  $AO$  հատվածի միջնակետը գտնվում է այդ շրջանագծի վրա:

148.  $MA$  և  $MB$  ուղիղները  $A$  և  $B$  կետերում շոշափում են  $O$  կենտրոնով շրջանագիծը:  $C$  կետը  $O$  կետի համաչափն է  $B$  կետի նկատմամբ: Ապացուցեք, որ  $\angle AMC=3\angle BMC$ :

149. Տրված շրջանագծի  $AB$  տրամագծի ծայրակետերից տարված են  $AA_1$  և  $BB_1$  ուղղահայացներ շրջանագծի այն շոշափողին, որն

ուղղակի  
կետը  
150. Տրված  
վորոշում  
միջնակետ  
հեռավոր  
151.  $ABC$   
ուղի  
բ)  $AB$   
շոշա  
շրջա  
ուղի

152. Կա  
ուղի

§

22 Շրջանագիծ

Հավելում:

և  $B$ -ն:  $r$   
արեղի:  
նրանցի  
ջանկյա  
կղերն  
ս  $AMB$ ,  
միջնակետ  
խոսքը  
Աղե  
հատված  
են երկու  
Անկ  
կենտրոն  
նային  
 $AOB$  կ  
ողով եր  
պատա



ուղղահայաց չէ այդ  $AB$  տրամագծին: Ապացուցեք, որ շոշափման կետը  $A_1B_1$  հատվածի միջնակետն է:

150. Տրված է 10սմ շառավիղով շրջանագիծ և մի կետ, որի հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից 3սմ է: Գտեք այդ կետից հեռավորությունները: Հիմնավորեք պատասխանը:

151.  $ABC$  եռանկյան  $B$  անկյունն ուղիղ է: Ապացուցեք, որ. ա)  $BC$  ուղիղ  $A$  կենտրոնով և  $AB$  շառավիղով շրջանագծի շոշափող է, բ)  $AB$  ուղիղը  $C$  կենտրոնով և  $CB$  շառավիղով շրջանագծի շոշափող է, գ)  $AC$  ուղիղը  $B$  զագաթով և  $BA, BC$  շառավիղներով շրջանագծերի շոշափող չէ:

152. Կառուցեք շրջանագծի շոշափող, որը. ա) զուգահեռ է տրված ուղղին, բ) ուղղահայաց է տրված ուղղին:

### § 3 ԿԵՆՏՐՈՆԱՅԻՆ ԵՎ ՆԵՐՔԾՅԱԼ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

#### 22 Շրջանագծի աղեղի աստիճանային չափը:

Շրջանագծի վրա նշենք երկու կետ՝  $A$ -ն և  $B$ -ն: Դրանք շրջանագիծը տրոհում են երկու աղեղի: Այդ աղեղները տարբերելու համար նրանցից յուրաքանչյուրի վրա նշենք միջանկյալ կետ, օրինակ՝  $L$ -ը և  $M$ -ը (նկ. 37): Աղեղները նշանակվում են այսպես.  $\cup ALB$  և  $\cup AMB$ : Երբեմն նշանակվում են նաև առանց միջանկյալ տառի՝  $\cup AB$  (երբ պարզ է լինում, թե խոսքը աղեղներից որի մասին է):

Աղեղը կոչվում է *կիսաշրջանագիծ*, եթե նրա ծայրերը միացնող հատվածը այդ շրջանագծի տրամագիծ է: 38,ա նկարում պատկերված են երկու կիսաշրջանագիծ, որոնցից մեկը նշագծված է հաստ գծով:

Անկյունը, որի զագաթը շրջանագծի կենտրոնն է, կոչվում է *նրա կենտրոնային անկյուն*: Դիցուք՝  $O$  կենտրոնով շրջանագծի կենտրոնային անկյան կողմերը շրջանագիծը հատում են  $A$  և  $B$  կետերում:  $AOB$  կենտրոնային անկյանը համապատասխանում են  $A$  և  $B$  ծայրերով երկու աղեղ (նկ. 38): Եթե  $\angle AOB$ -ն փռված է, ապա նրան համապատասխանում են երկու կիսաշրջանագիծ (նկ. 38,ա): Եթե  $\angle AOB$ -ն



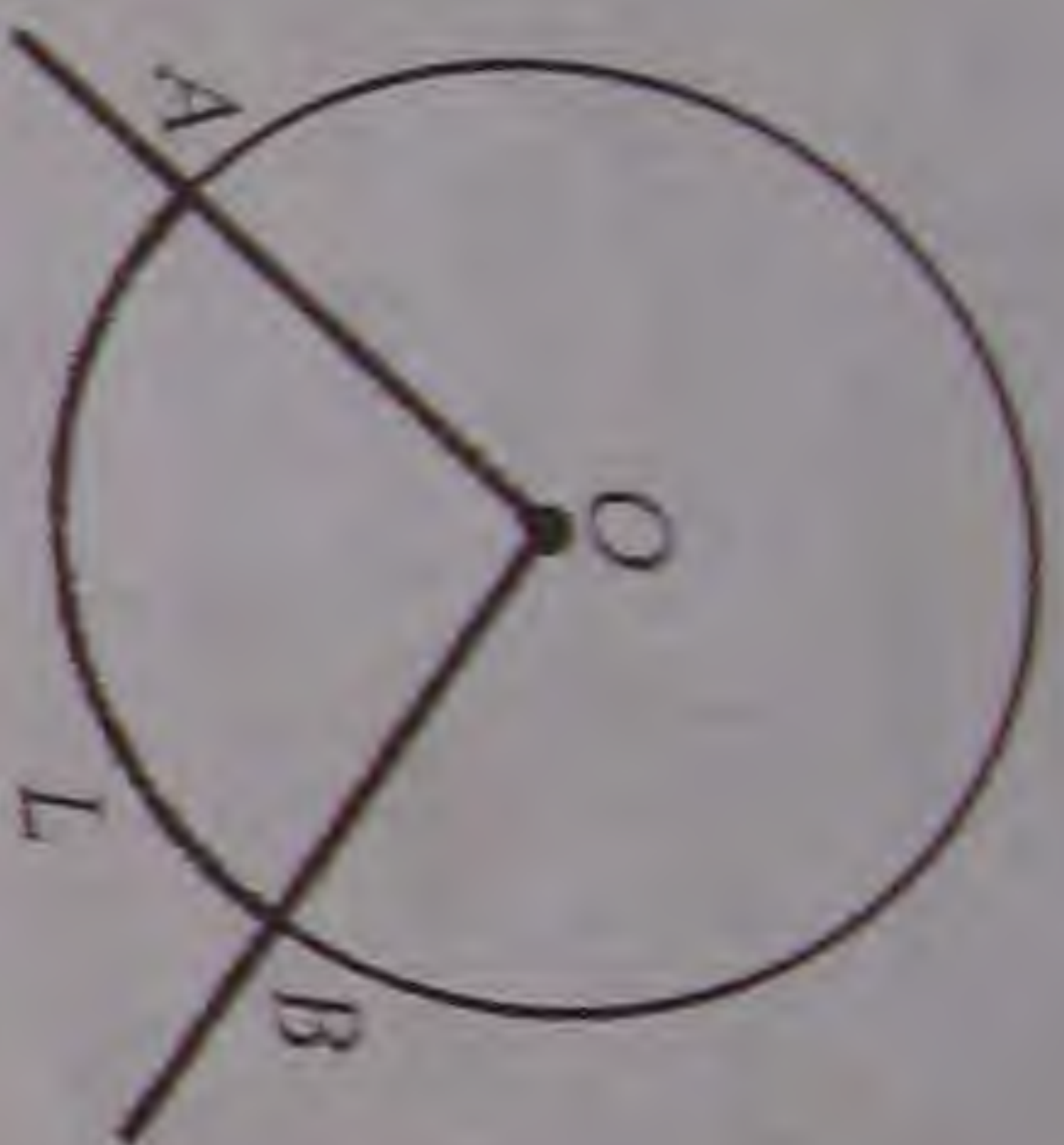
Նկ. 37





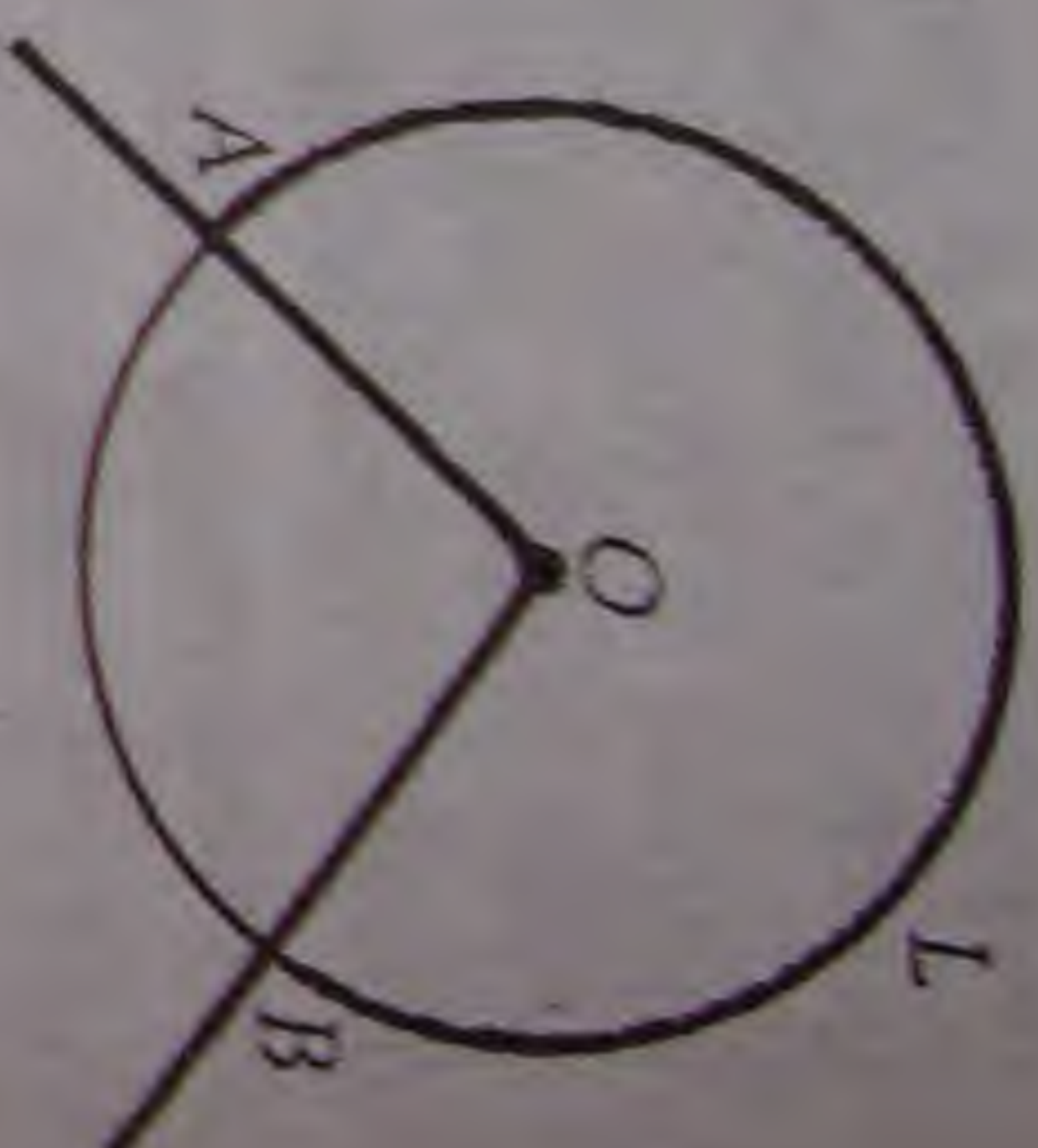
$$\sphericalangle ALB = 180^\circ$$

ա)



$$\sphericalangle ALB = \sphericalangle AOB$$

բ) Նկ. 38



$$\sphericalangle ALB = 360^\circ - \sphericalangle AOB$$

գ)

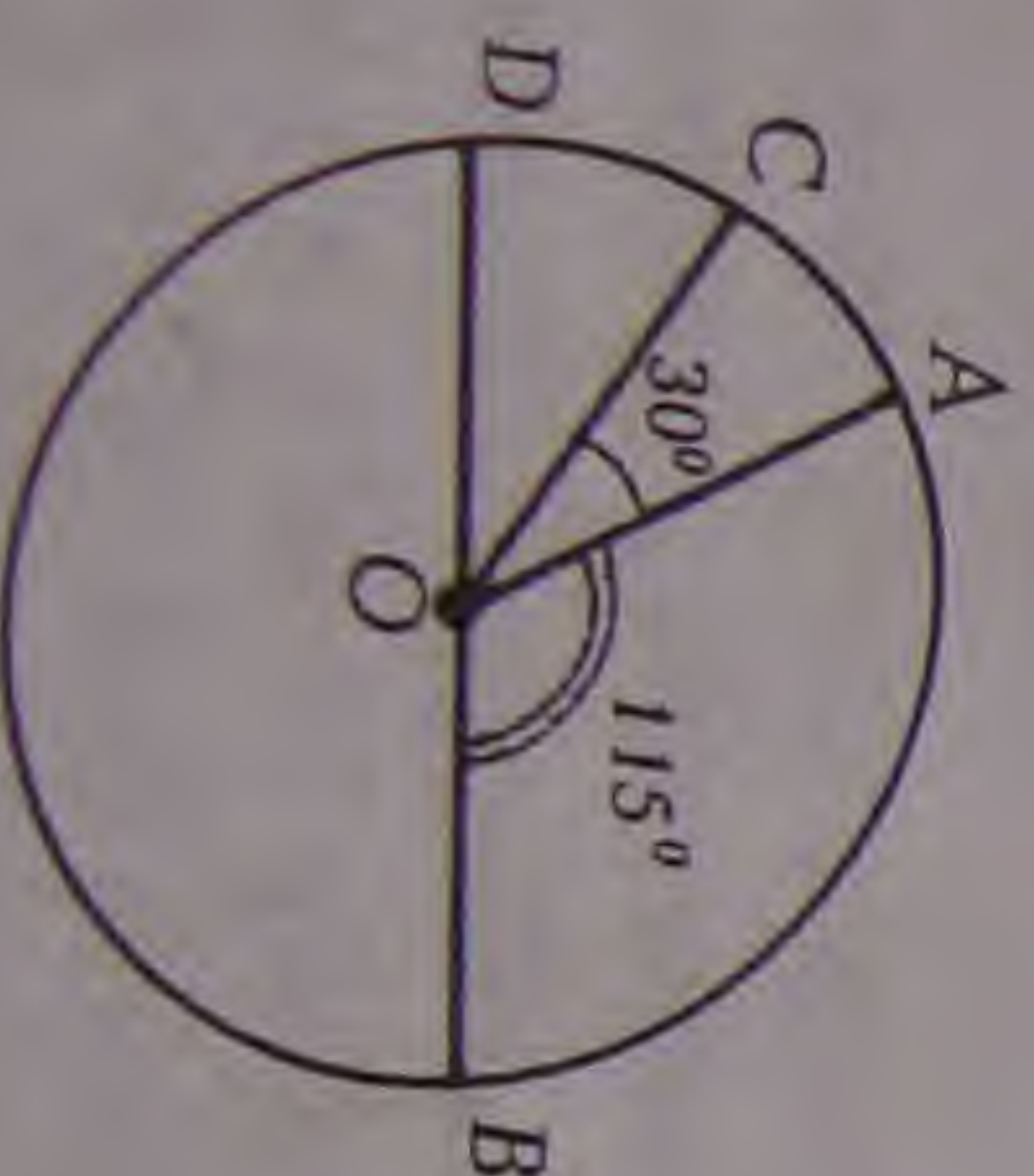
չփոփած է, ապա ասում են, որ այդ անկյան ներսում ընկած  $AB$  արկերը փոքր է կիսաշրջանագծից: 38,բ նկարում այդ արկերը նշագծված է հաստ գծով:  $A$  և  $B$  ծայրերով մյուս արկերի մասին ասում են, որ այն մեծ է կիսաշրջանագծից (արկը  $ALB$ -ն՝ 38,գ նկարում):

Շրջանագծի արկերը կարելի է չափել աստիճաններով: Եթե  $O$  կենտրոնով շրջանագծի  $AB$  արկերը փոքր է կիսաշրջանագծից կամ կիսաշրջանագիծ է, ապա համարվում է, որ նրա աստիճանային չափը հավասար է  $AOB$  կենտրոնային անկյան աստիճանային չափին (տե՛ս նկ. 38,ա,բ): Իսկ եթե  $AB$  արկերը մեծ է կիսաշրջանագծից, ապա համարվում է, որ նրա աստիճանային չափը հավասար է  $360^\circ - \sphericalangle AOB$  (տե՛ս նկ. 38,գ):

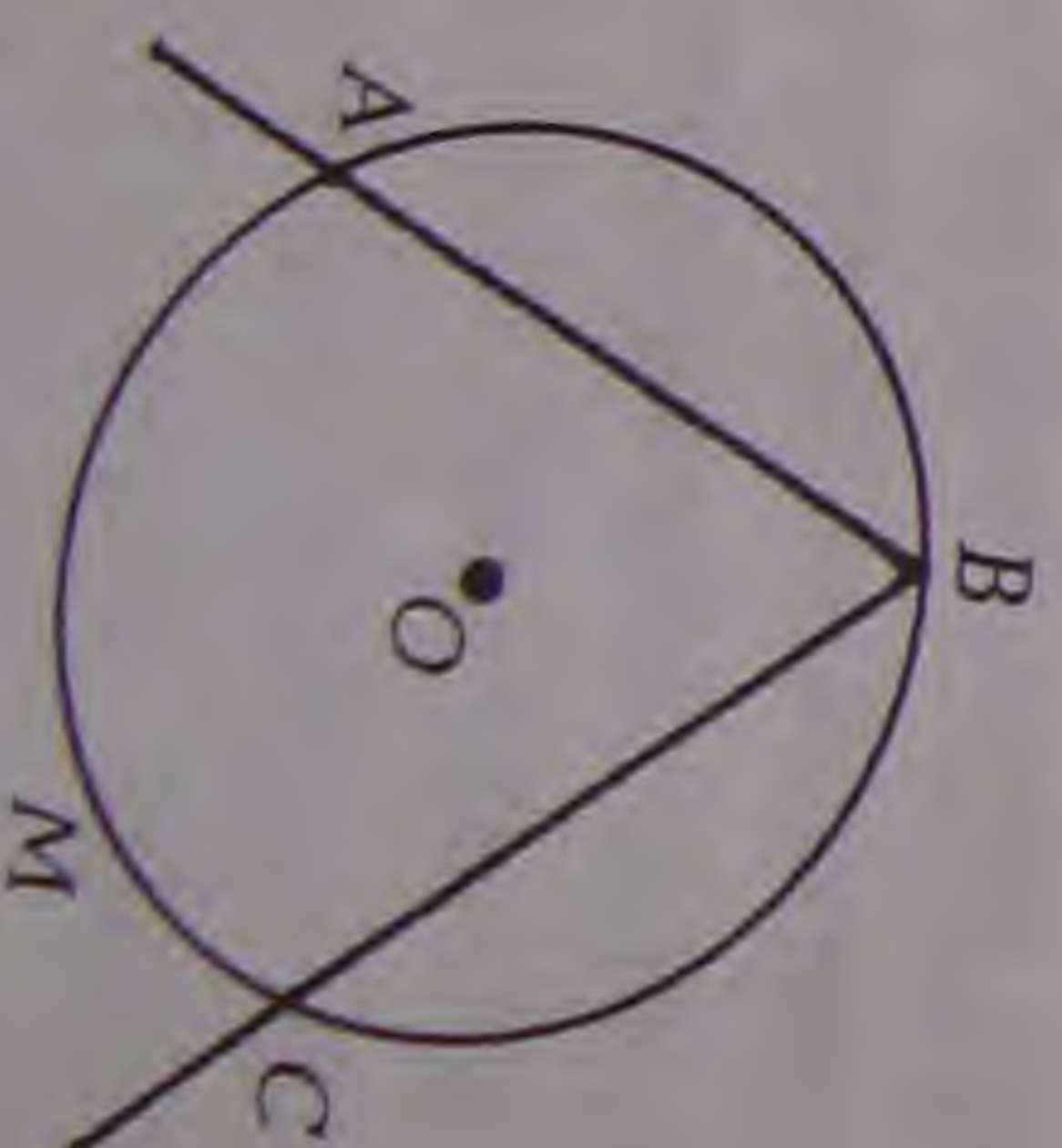
Այստեղից հետևում է, որ շրջանագծի ընդհանուր ծայրեր ունեցող երկու արկերների աստիճանային չափերի գումարը  $360^\circ$  է:

Ինչպես  $AB$  արկերի ( $\sphericalangle ALB$  արկերի) աստիճանային չափը, այնպես էլ  $AB$  արկերը ( $ALB$  արկերը) նշանակվում են նույն  $\sphericalangle AOB$  ( $\sphericalangle ALB$ ) պայմանաշանով:

Նկար 39-ում  $CAB$  արկերի աստիճանային չափը հավասար է  $145^\circ$ :



Նկ. 39



Նկ. 40



Սովորաբար, համառոտ ասում են, « $CAB$  աղեղը հավասար է  $145^\circ$ », կամ պարզապես՝ « $CAB$  աղեղը  $145^\circ$  է», և գրում են.  $\sphericalangle CAB=145^\circ$ : Այդ նույն նկարում  $\sphericalangle ADB=360^\circ-115^\circ=245^\circ$ ,  $\sphericalangle CDB=360^\circ-145^\circ=215^\circ$ ,  $\sphericalangle DB=180^\circ$ :

**23) Թեորեմ Ներգծյալ անկյան մասին:** Այն անկյունը, որի գագաթը գտնվում է շրջանագծի վրա, իսկ կողմերը հատում են այդ շրջանագիծը, կոչվում է ներգծյալ անկյուն:

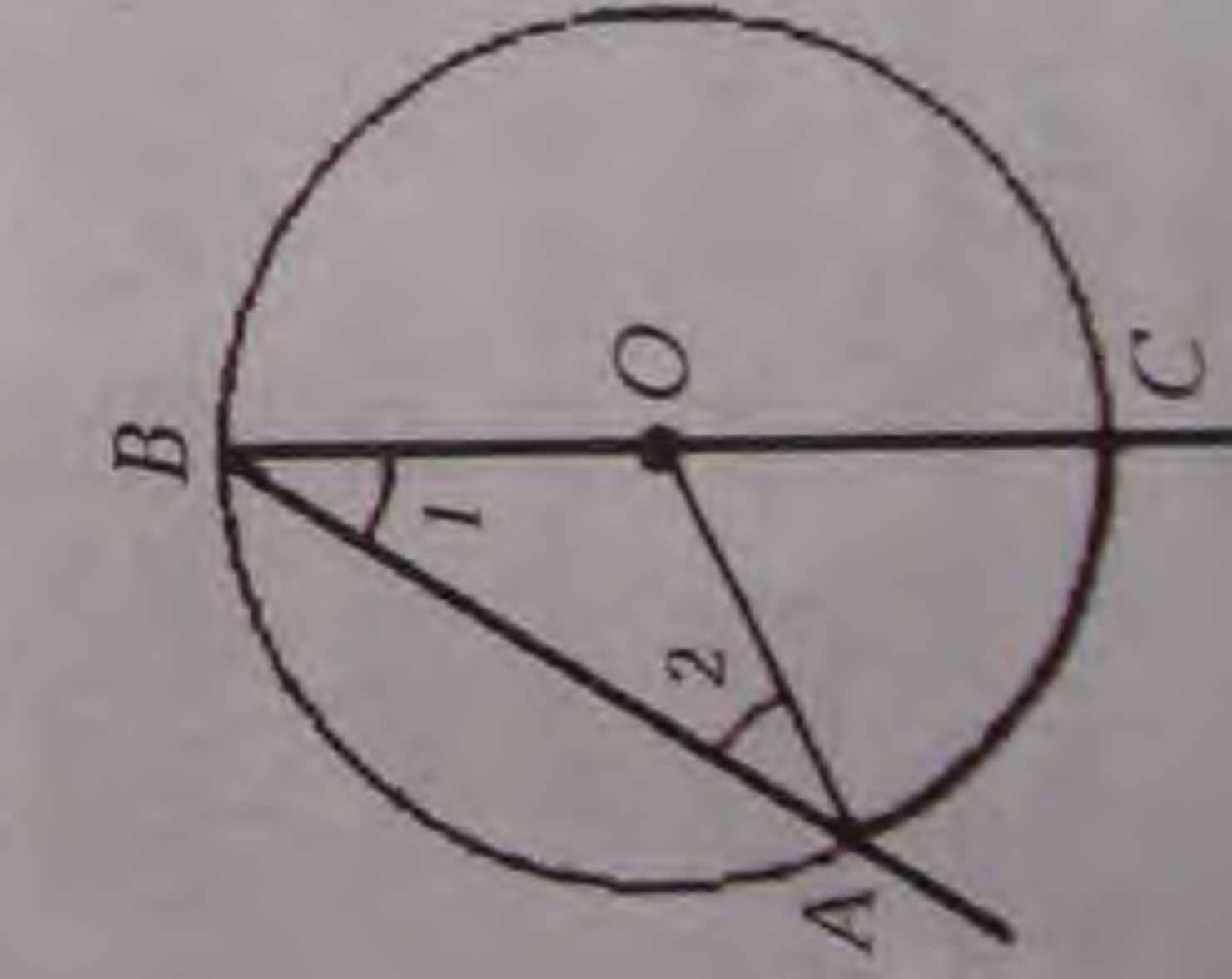
Նկար 40-ում  $ABC$  անկյունը ներգծյալ է:  $AMC$  աղեղն ընկած է այդ անկյան ներսում: Այդպիսի դեպքերում ասում են, որ  $ABC$  ներգծյալ անկյունը *հենվում է*  $AMC$  աղեղի վրա: Ապացուցենք թեորեմ ներգծյալ անկյան մասին:

**Թեորեմ:** Ներգծյալ անկյունը չափվում է այն աղեղի կեսով, որի վրա նա հենվում է:

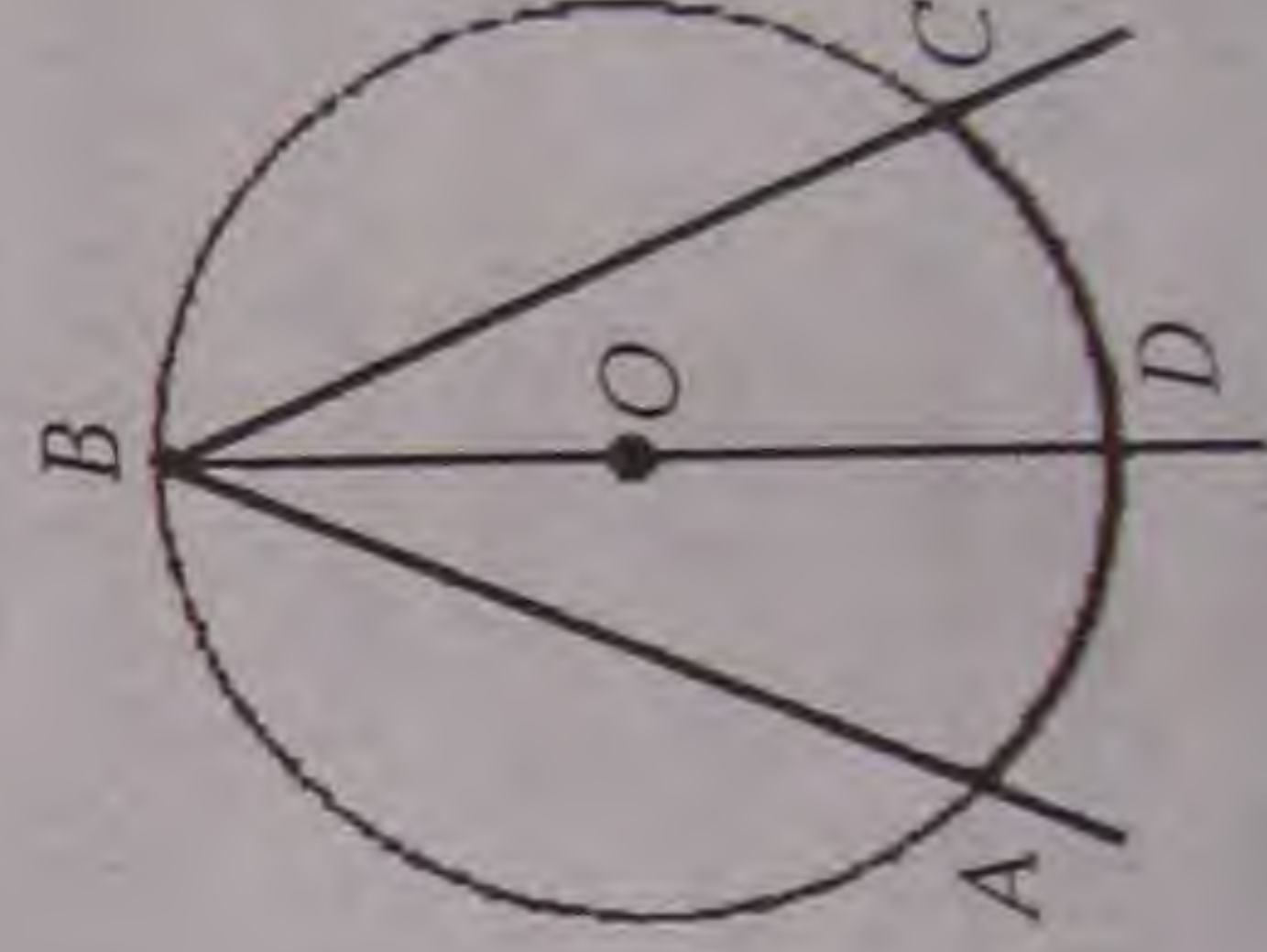
Ապացուցում: Դիցուք՝  $\angle ABC$ -ն  $O$  կենտրոնով շրջանագծի ներգծյալ անկյուն է, որը հենվում է  $AC$  աղեղի վրա (նկ. 41): Ապացուցենք, որ  $\angle ABC = \frac{1}{2} \sphericalangle AOC$ : Դիտարկենք  $BO$  ճառագայթի՝  $ABC$  անկյան

նկատմամբ դասավորության հնարավոր երեք դեպք:

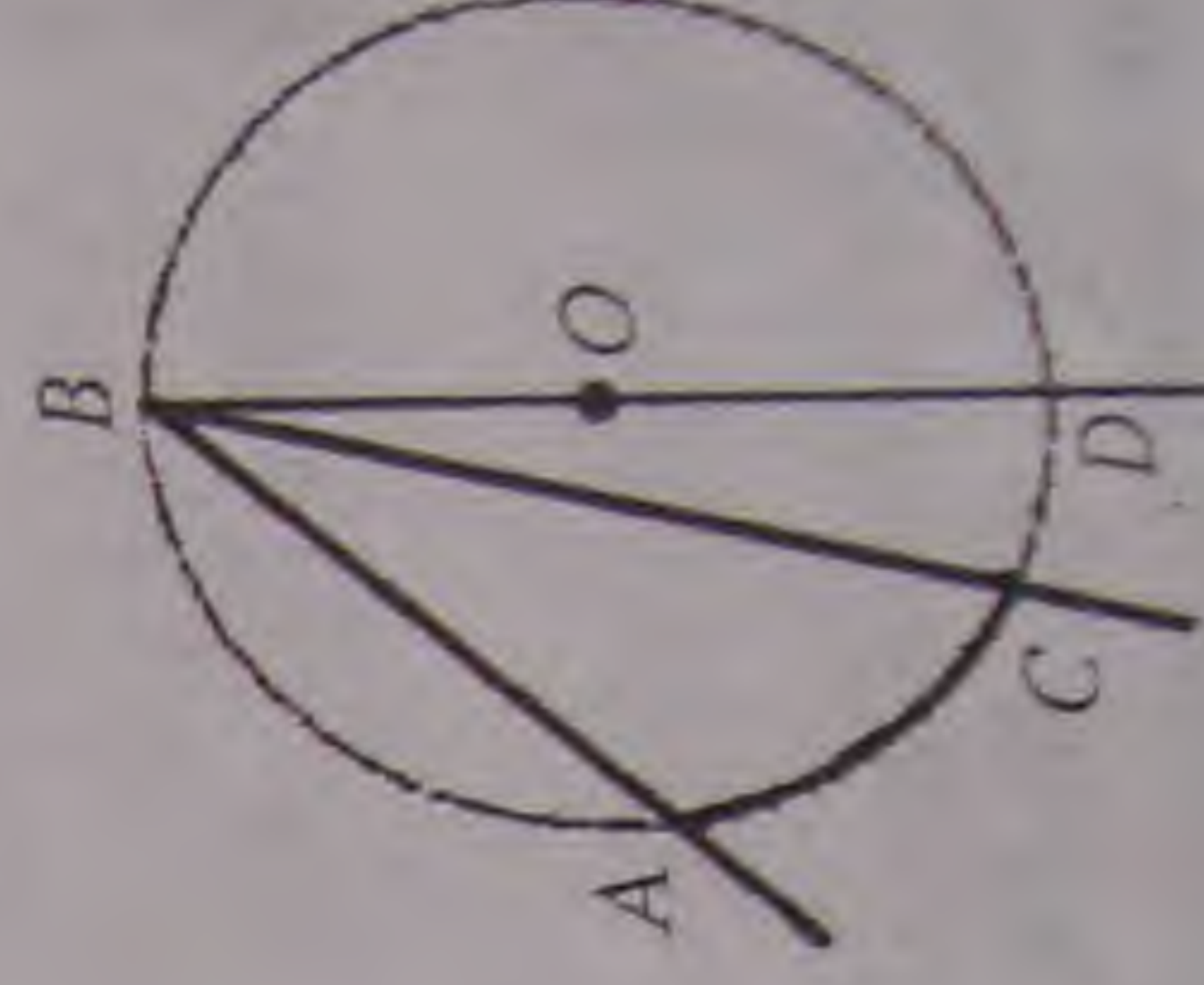
1)  $BO$  ճառագայթը *համընկնում է*  $ABC$  եռանկյան կողմերից մեկին, օրինակ՝  $BC$  կողմին (նկ. 41, ա): Այս դեպքում  $AC$  աղեղը փոքր է կիսաշրջանագծից, ուրեմն՝  $\angle AOC = \sphericalangle AC$ : Քանի որ  $AOC$  անկյունը  $AOB$  հավասարասրուն եռանկյան արտաքին անկյուն է, ապա  $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2$ : Բայց անկյուններ 1-ը և 2-ը հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյուններ են և, ուրեմն, հավասար են.



ա)



բ)



գ)

Նկ. 41





Նկ. 42



Նկ. 43

$\angle 1 = \angle 2$ : Այսպիսով՝  $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2 \cdot \angle 1$ , որտեղից հետևում է, որ  $2 \cdot \angle 1 = \cup AC$  կամ՝  $\angle ABC = \angle 1 = \frac{1}{2} \cup AC$ :

2)  $BO$  ճառագայթը  $ABC$  անկյունը տրոհում է երկու անկյան: Այս դեպքում  $BO$  ճառագայթը ինչ որ  $D$  կետում հատում է  $AC$  աղեղը (Նկ. 41,բ):  $D$  կետը տրոհում է  $AC$  աղեղը երկու աղեղի՝  $\cup AD$ -ի և  $\cup DC$ -ի: Ըստ ապացուցված 1-ին դեպքի՝  $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$  և  $\angle DBC = \frac{1}{2} \cup DC$ : Այս

հավասարությունները անդամ առ անդամ գումարելով՝ ստացվում է.

$$\angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \cup AD + \frac{1}{2} \cup DC, \text{ կամ } \angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC:$$

3)  $BD$  ճառագայթը չի տրոհում  $ACB$  անկյունը երկու անկյան և չի հանդնդնում այդ անկյան որևէ կողմին: Այս դեպքի համար ապացուցումը կատարենք ինքնուրույն (օգտվեք 41,գ Նկարից):

Հետևաբար 1: Միևնույն աղեղին հենված ներգծյալ անկյունները հավասար են (Նկ. 42):

Հետևաբար 2: Կիսաշրջանագծին հենված ներգծյալ անկյունը ուղիղ է (Նկ. 43):



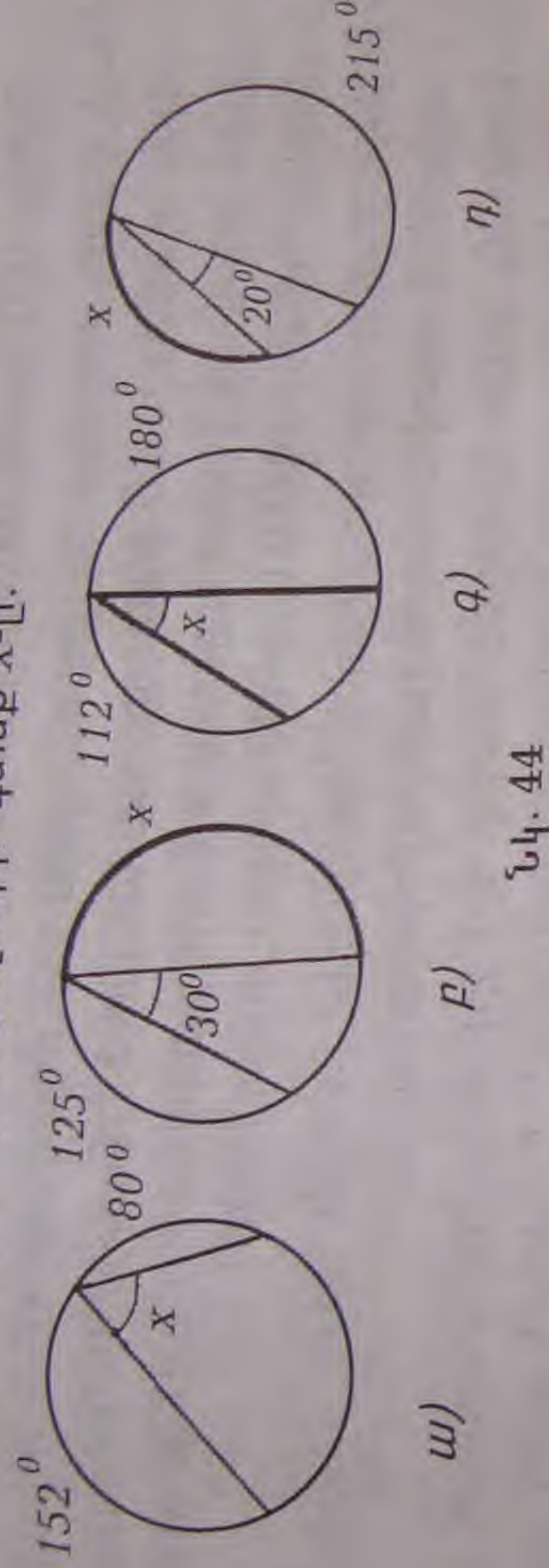
Խնդիրներ

153. Գծագրեք Օ կենտրոնով շրջանագիծ և նրա վրա նշեք  $A$  կետը:  $AB$  լարը կառուցեք այնպես, որ  $\angle AOB = 60^\circ$ ,  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $\angle AOB = 120^\circ$ ,  $\angle AOB = 180^\circ$ :

154. Օ կենտրոնով շրջանագծի շառավիղը 16սմ է: Գտեք  $AB$  լարը, երբ  $\angle AOB = 60^\circ$ ,  $\angle AOB = 180^\circ$ :



155.  $O$  կենտրոնով շրջանագծի  $AB$  և  $CD$  լարերը հավասար են:  
 ա) Ապացուցեք, որ  $A$  և  $B$  ծայրերով երկու աղեղները համապատասխանաբար հավասար են  $C$  և  $D$  ծայրերով երկու աղեղներին,  
 բ) գտեք  $C$  և  $D$  ծայրերով աղեղները, եթե  $\angle AOB = 112^\circ$ ;  
 156.  $AB$  կիսաշրջանագծի վրա վերցված են  $C$  և  $D$  կետերը այնպես, որ  $\sphericalangle AC = 57^\circ$ ,  $\sphericalangle BOD = 63^\circ$ : գտեք  $CD$  լարը, եթե շրջանագծի շառավիղը 12սմ է:  
 157. գտեք  $ABC$  ներգծյալ անկյունը, եթե  $AC$  աղեղը, որի վրա այն հենվելու է, հավասար է. ա)  $48^\circ$ , բ)  $57^\circ$ , գ)  $90^\circ$ , դ)  $124^\circ$ , ե)  $180^\circ$ ;  
 158. Ըստ նկար 44-ի տվյալների՝ գտեք  $x$ -ը:



Նկ. 44

159.  $AOB$  կենտրոնային անկյունը  $30^\circ$ -ով մեծ է  $AB$  աղեղին հենված ներգծյալ անկյունից: Գտեք այդ անկյուններից յուրաքանչյուրը:  
 160.  $AB$  լարը ձգում է  $115^\circ$ -ի հավասար աղեղ, իսկ  $AC$  լարը՝  $43^\circ$ -ի աղեղ: Գտեք  $BAC$  անկյունը:  
 161. Շրջանագիծը  $A$  և  $B$  կետերով տրոհվում է երկու աղեղի, որոնց աստիճանային չափերը հարաբերում են, ինչպես 6:4: Գտեք այդ աղեղների աստիճանային չափերը:  
 162.  $A$  և  $B$  կետերը շրջանագիծը տրոհում են երկու աղեղի, որոնցից փոքրը  $140^\circ$  է, իսկ մեծը  $M$  կետով տրոհված է 6:5 հարաբերությամբ՝ հաշված  $A$  կետից: Գտեք  $BAM$  անկյունը:  
 163.  $A$ ,  $B$  և  $C$  կետերը գտնվում են  $O$  կենտրոնով շրջանագծի վրա: Գտեք  $ABC$  անկյունը, եթե  $\angle AOC = 146^\circ$ , իսկ  $B$  և  $O$  կետերը գտնվում են  $AC$  ուղղի միևնույն կողմում:  
 164.  $A$ ,  $B$  և  $C$  կետերը գտնվում են  $O$  կենտրոնով շրջանագծի վրա: Գտեք  $ABC$  անկյունը, եթե  $\angle AOC = 164^\circ$ , իսկ  $B$  և  $O$  կետերը գտնվում են  $AC$  ուղղի տարբեր կողմերում:  
 165.  $O$  կենտրոնով շրջանագծի  $AB$  աղեղը  $90^\circ$  է: Գտեք  $O$  կետի հեռավորությունը  $AB$  լարից, եթե  $AB = 24$ սմ:  
 166.  $O$  կենտրոնով շրջանագծի  $AB$  աղեղը  $120^\circ$  է: Գտեք  $O$  կետի հեռավորությունը  $AB$  լարից, եթե շրջանագծի շառավիղը 20սմ է:



167.  $AB$ -ն և  $AC$ -ն շրջանագծի լարեր են:  $\angle BAC = 70^\circ$ ,  $\sphericalangle A = 120^\circ$ : գտեք  $AC$  աղեղի աստիճանային չափը:
168. Շրջանագծում տարված են  $AB$  տրամագիծը և  $AC$  լարը: Գտեք  $BAC$  անկյունը, եթե  $AC$  և  $CB$  աղեղների աստիճանային չափերը հարաբերում են, ինչպես 7:2:
169. Շրջանագծի  $AB$  և  $CD$  լարերը հատվում են  $E$  կետում: Գտեք  $BEC$  անկյունը, եթե  $\sphericalangle A = 54^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 70^\circ$ :
170.  $AB$ -ն շրջանագծի տրամագիծն է: Շրջանագծի վրա վերցված է  $C$  կետն այնպես, որ  $BC$  լարը հավասար է շրջանագծի շառավիղին: գտեք  $ABC$  եռանկյան անկյունները:
171.  $A$  կետով տարված են շրջանագծին  $AB$  շոշափողը ( $B$ -ն շոշափման կետն է) և  $AD$  հատողը, որն անցնում է նաև  $O$  կենտրոնով ( $D$ -ն շրջանագծի կետ է, ընդ որում՝  $O$ -ն գտնվում է  $A$  և  $D$  կետերի միջև): Գտեք  $\angle BAD$ -ն և  $\angle ADB$ -ն, եթե  $\sphericalangle B = 110^\circ 20'$ :
172. Ապացուցեք, որ շրջանագծի՝ գուգախեռ լարերի միջև առնված աղեղների աստիճանային չափերը հավասար են:
173. Շրջանից դուրս վերցված կետից այդ շրջանագծին տարված են երկու հատող, որոնց կազմած անկյունը  $32^\circ$  է: Շրջանագծի՝ այդ անկյան կողմերի միջև առնված աղեղներից մեծը հավասար է  $100^\circ$ : Գտեք փոքր աղեղը:
174. Գտեք շրջանից դուրս վերցված կետից այդ շրջանագծին տարված երկու հատողներով կազմված սուր անկյունը, եթե շրջանագծի հատողների միջև առնված աղեղները հավասար են  $140^\circ$  և  $52^\circ$ :
175.  $AC$  հատվածը շրջանագծի տրամագիծ է,  $AB$ -ն՝ լար,  $MA$ -ն՝ շոշափող, և  $MAB$  անկյունը սուր է: Ապացուցեք, որ  $\angle MAB = \angle ACB$ :
176.  $AM$  ուղիղը շրջանագծի շոշափող է, իսկ  $AB$ -ն՝ այդ շրջանագծի լար: Ապացուցեք, որ  $MAB$  անկյունը չափվում է  $MAB$  անկյան ներսում առնված  $AB$  աղեղի կեսով:
177.  $ABC$  եռանկյան գագաթները գտնվում են շրջանագծի վրա:  $\angle C > \angle A$  և  $\angle C > \angle B$ :
178. Տրված են մի հատված և մի անկյուն: Կառուցեք շրջանագիծն այնպես, որ այդ հատվածը լինի նրա այն լարը, որի ձգած աղեղի աստիճանային չափը հավասար է տրված անկյանը:
179. Կառուցեք տրված շրջանագծի շոշափողը, որն անցնում է այդ շրջանից դուրս տրված կետով:
- Լ ո թ ո թ : Պիցուք՝ տրված են  $O$  կենտրոնով շրջանագիծը և շրջանից դուրս գտնվող  $A$  կետը: Ենթադրենք, որ խնդիրը լուծ-

$$\angle AOB = \angle B$$

24 ՄԻ

Բոլորը

Բոլորը

Բոլորը

Բոլորը

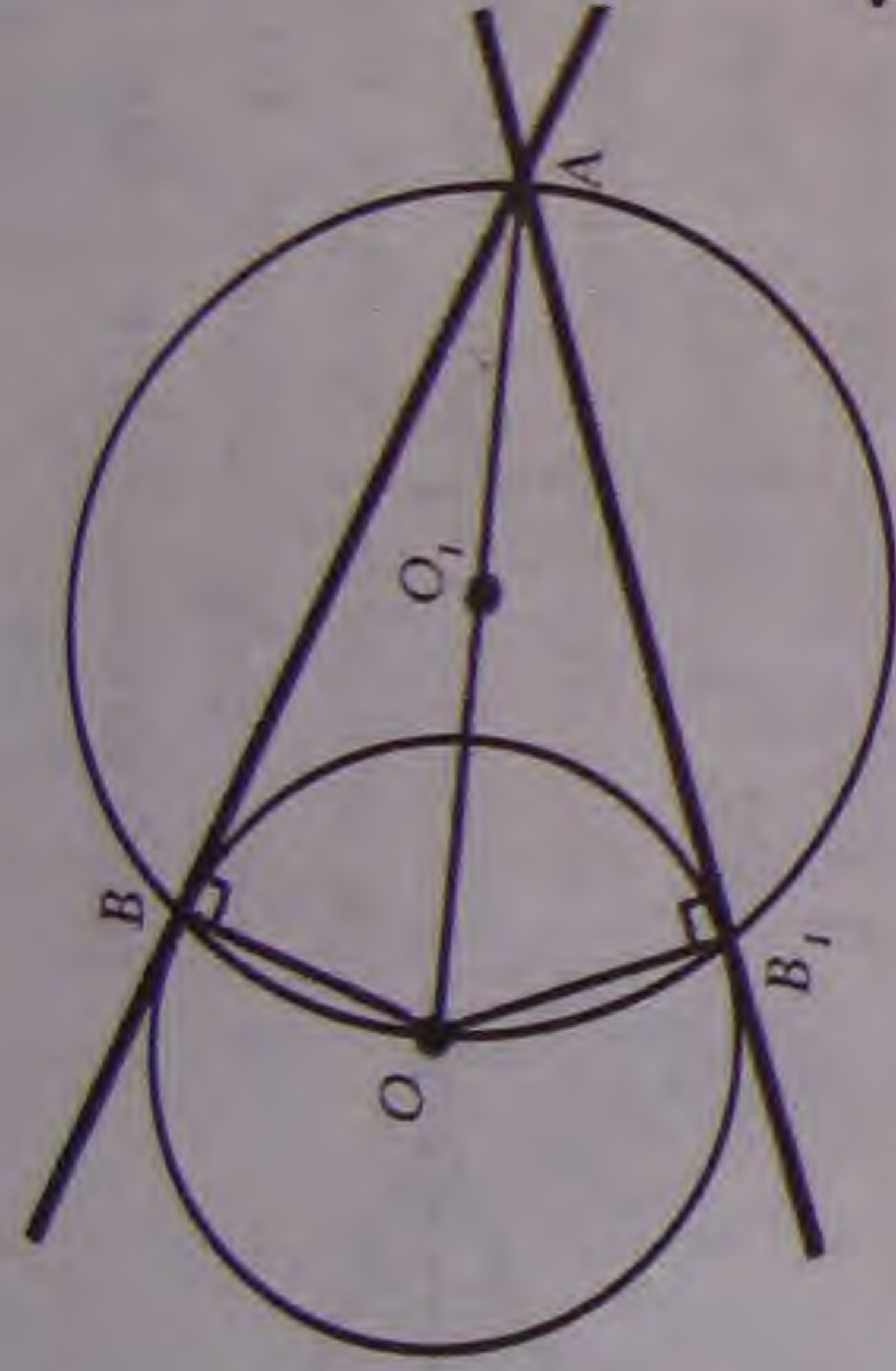
Բոլորը

Բոլորը

Բոլորը

Բոլորը





Նկ. 45

ված է, և  $AB$ -ն որոնելի շոշափողն է (նկ. 45): Քանի որ  $AB$  ուղիղը ուղղահայաց է  $OB$  շառավիղին, ապա խնդրի լուծումը հանգում է շրջանագծի այն  $B$  կետի կառուցմանը, որի համար  $\angle ABO$ -ն ուղիղ է: Այդ կետը կարելի է կառուցել հետևյալ կերպ. տանում ենք  $OA$  հատվածը և որոշում նրա  $O_1$  միջնակետը: Այնուհետև կառուցում ենք  $O_1$  կենտրոնով և  $O_1A$  շառավիղով շրջանագիծը: Այդ շրջանագիծը տրված շրջանագծի հետ հատվում է երկու՝  $B$  և  $B_1$  կետերում:  $AB$ -ն և  $A_1B_1$ -ը որոնելի շոշափողներն են, քանի որ  $AB \perp OB$  և  $AB_1 \perp OB_1$ : Իսկապես՝  $ABO$  և  $AB_1O$  անկյուններից յուրաքանչյուրը  $O_1$  կենտրոնով շրջանագծի ներգծյալ անկյուն է, որը հենվում է կիսաշրջանագծի վրա: Ակներև է, որ խնդիրն ունի երկու լուծում:

*LOV*

#### § 4

### ԵՌԱՆԿՅԱՆ ՉՈՐՍ ՆՇԱՆԱՎՈՐ ԿԵՏԵՐԸ

**24 Անկյան կիսորդի և հաղվածի միջնուղղահայացի հաղկաթյունները:** Ապացուցենք թեորեմ անկյան կիսորդի մասին:

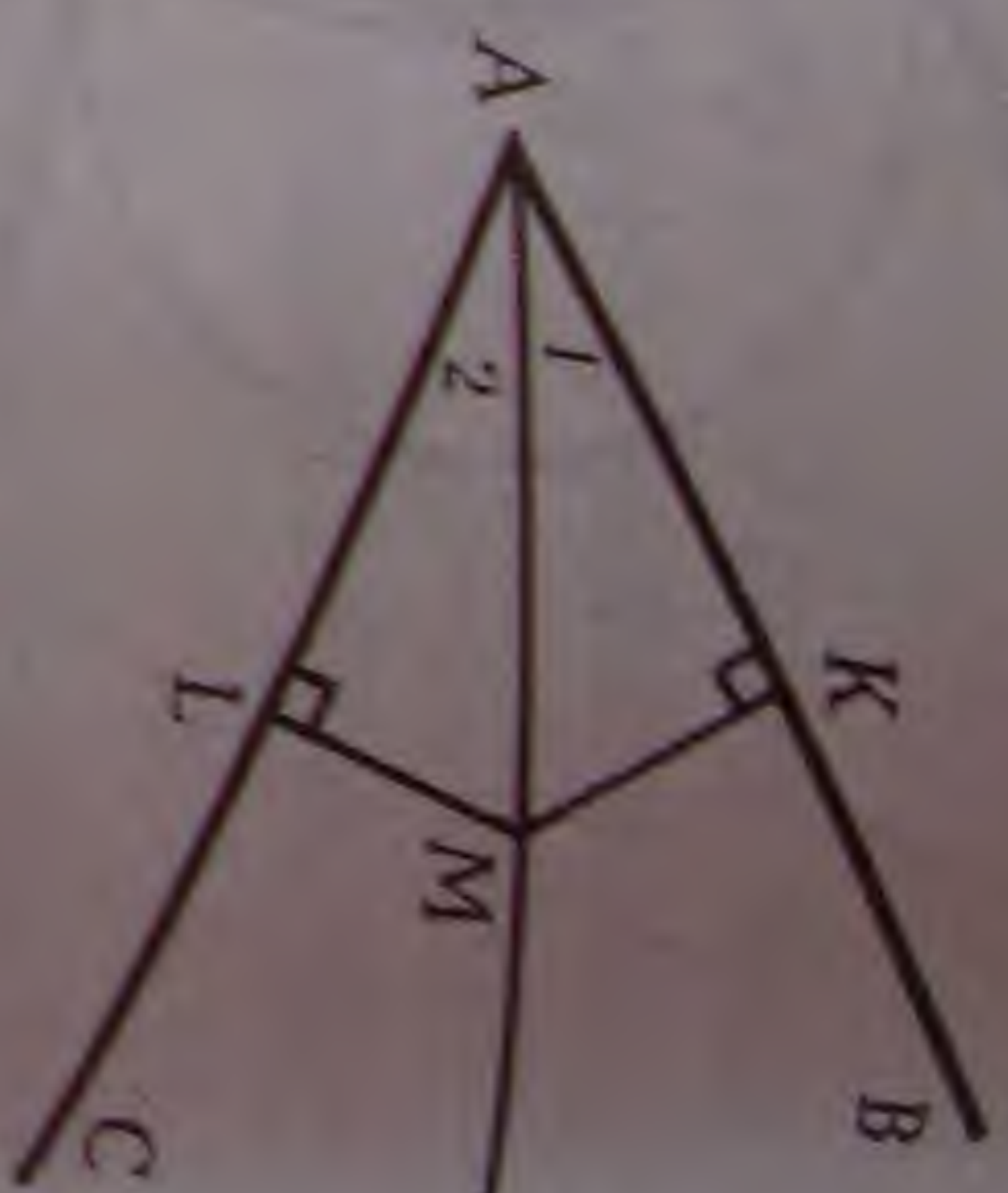
**Թեորեմ:** Չփոփած անկյան կիսորդի յուրաքանչյուր կետ հավասարահեռ է անկյան կողմերից<sup>1</sup>: Հակադարձը՝ անկյան ներսում գտնվող և նրա կողմերից հավասարահեռ յուրաքանչյուր կետ գտնվում է այդ անկյան կիսորդի վրա:

Ապացուցում: 1)  $BAC$  անկյան կիսորդի վրա վերցնենք կամայական  $M$  կետ, տանենք  $AB$  և  $AC$  ուղիղներին ուղղահայացներ  $MK$ -ն և  $ML$ -ը: Ապացուցենք, որ  $MK = ML$  (նկ. 46):

<sup>1</sup> Այսինքն՝ հավասարահեռ է անկյան կողմերն ընդգրկող ուղիղներից:



Պատարկենք  $\Delta MK$  և  $\Delta ML$  ուղղանկյուն եռանկյունները: Այդ եռանկյունները, ըստ ներքնածիզի և սուր անկյան, հավասար են ( $\Delta M$ -ը ընդհանուր ներքնածիզ է,  $\angle 1 = \angle 2$  ըստ պայմանի): Հետևաբար՝  $MK = ML$ :



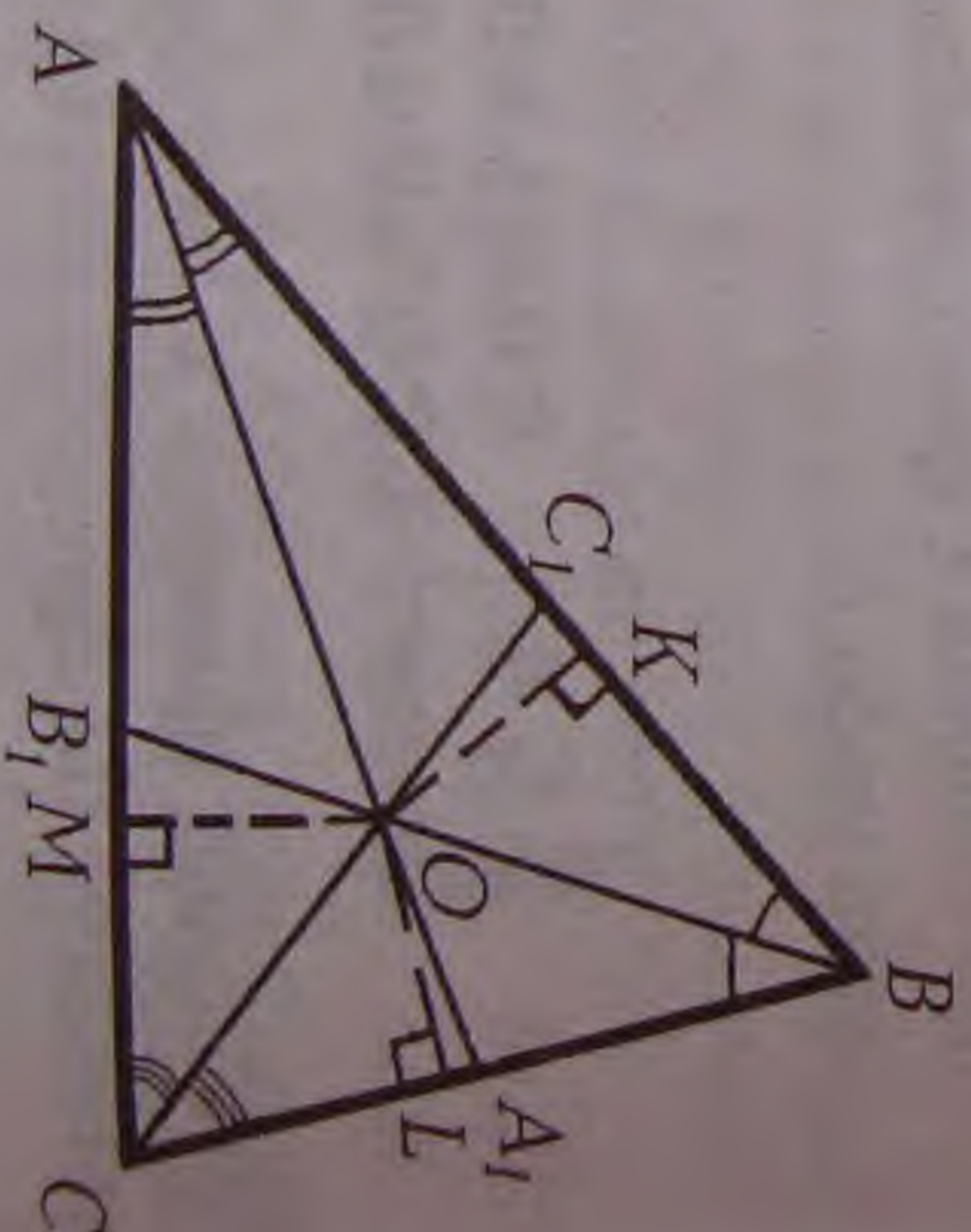
Նկ. 46

2) Պիցուր՝  $M$  կետը գտնվում է  $BAC$  անկյան ներսում և հավասարախեռ է  $AB$  և  $AC$  կողմերից: Ապացուցենք, որ  $\Delta M$  ճառագայթը  $BAC$  անկյան կիսորդն է (ճկ. 46):

Տանենք  $AB$  և  $AC$  ուղիղներին ուղղահայացներ՝  $MK$ -ն և  $ML$ -ը:  $\Delta MKM$  և  $\Delta LML$  ուղղանկյուն եռանկյունների  $\Delta M$  ներքնածիզը ընդհանուր է, իսկ  $MK$  և  $ML$  էջերը, ըստ պայմանի, հավասար են: Ուրեմն՝ այդ եռանկյունները հավասար են, հետևաբար՝  $\angle 1 = \angle 2$ : Իսկ դա նշանակում է, որ  $\Delta M$  ճառագայթը  $BAC$  անկյան կիսորդն է: Թեորեմն ապացուցված է:

< Ե տ և ա ն ք : Եռանկյան կիսորդները հատվում են մի կետում:

Իրոք,  $O$  տառով նշանակենք  $ABC$  եռանկյան  $AA_1$  և  $BB_1$  կիսորդների հատման կետը և այդ կետից տանենք  $OK$ ,  $OL$  և  $OM$  ուղղահայացները համապատասխանաբար  $AB$ ,  $BC$  և  $CA$  ուղիղներին (ճկ. 47): Ըստ անկյան կիսորդի հատկության՝  $OK = OM$  և  $OK = OL$ : Հետևաբար՝  $OM = OL$ ,

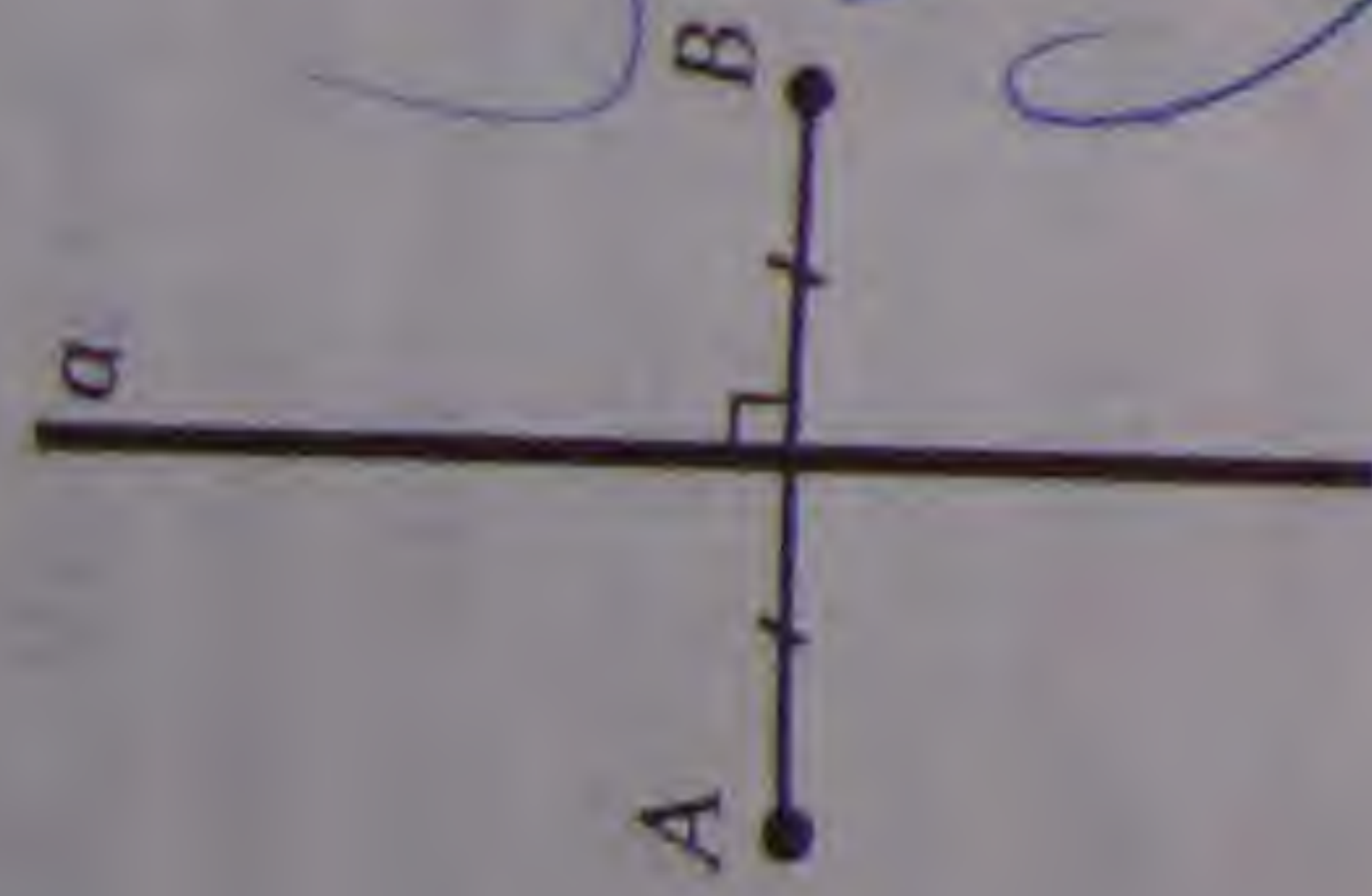


Նկ. 47

ինչը նշանակում է, որ  $O$  կետը հավասարախեռ է  $ABC$  եռանկյան  $CA$  և  $CB$  կողմերից: Ուրեմն՝ այդ կետը գտնվում է  $CC_1$  կիսորդի վրա: Հետևաբար՝  $ABC$  եռանկյան երեք կիսորդն էլ հատվում են նույն  $O$  կետում, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Ինչպես գիտենք, *հատվածի միջնորդահայաց* կոչվում է այն ուղիղը, որն անցնում է հատվածի միջնակետով և ուղղահայաց է նրան: Նկար 48-ում պատկերված  $a$  ուղիղը  $AB$  հատվածի միջնորդահայացն է: Յուրաքանչյուր հատվածի միջնորդահայացը միակն է:





Նկ. 48



Նկ. 49

Մենք արդեն գիտենք հատվածի միջնուղահայացի հատկությունը (տես 17-րդ կետը), ըստ որի՝ հատվածի միջնուղահայացի յուրաքանչյուր կետ հավասարապես է հեռացված այդ հատվածի ծայրակետերից (տես նկ. 49): Ճշմարիտ է նաև հակադարձը. յուրաքանչյուր կետ, որ հավասարահեռ է հատվածի ծայրակետերից, գտնվում է այդ հատվածի միջնուղահայացի վրա:

Օգտվելով հատվածի միջնուղահայացի հատկությունից՝ կարող ենք կատարել մի կարևոր եզրակացություն. *եռանկյան կողմերի միջնուղահայացները հատվում են մի կետում*:

Իրոք,  $O$  տառով նշանակենք  $ABC$  եռանկյան  $AB$  և  $BC$  կողմերի  $m$  և  $n$  միջնուղահայացների հատման կետը (նկ. 50. քանի որ  $AB$  և  $BC$  ուղիղները հատվում են, ուրեմն հատվում են նաև  $m$ -ը և  $n$ -ը): Ըստ հատվածի միջնուղահայացի հատկության՝  $OB=OA$  և  $OB=OC$ : Ուրեմն՝  $OA=OC$ , ինչը նշանակում է, որ  $O$ -ն հավասարապես է հեռացված  $AC$  հատվածի ծայրակետերից: Հետևաբար՝ այն գտնվում է այդ հատվածի միջնուղահայացի՝  $p$ -ի վրա: Այսպիսով՝  $ABC$  եռանկյան կողմերի բոլոր երեք՝  $m$ ,  $n$  և  $p$  միջնուղահայացները հատվում են միևնույն  $O$  կետում:



Նկ. 50



Նկ. 51



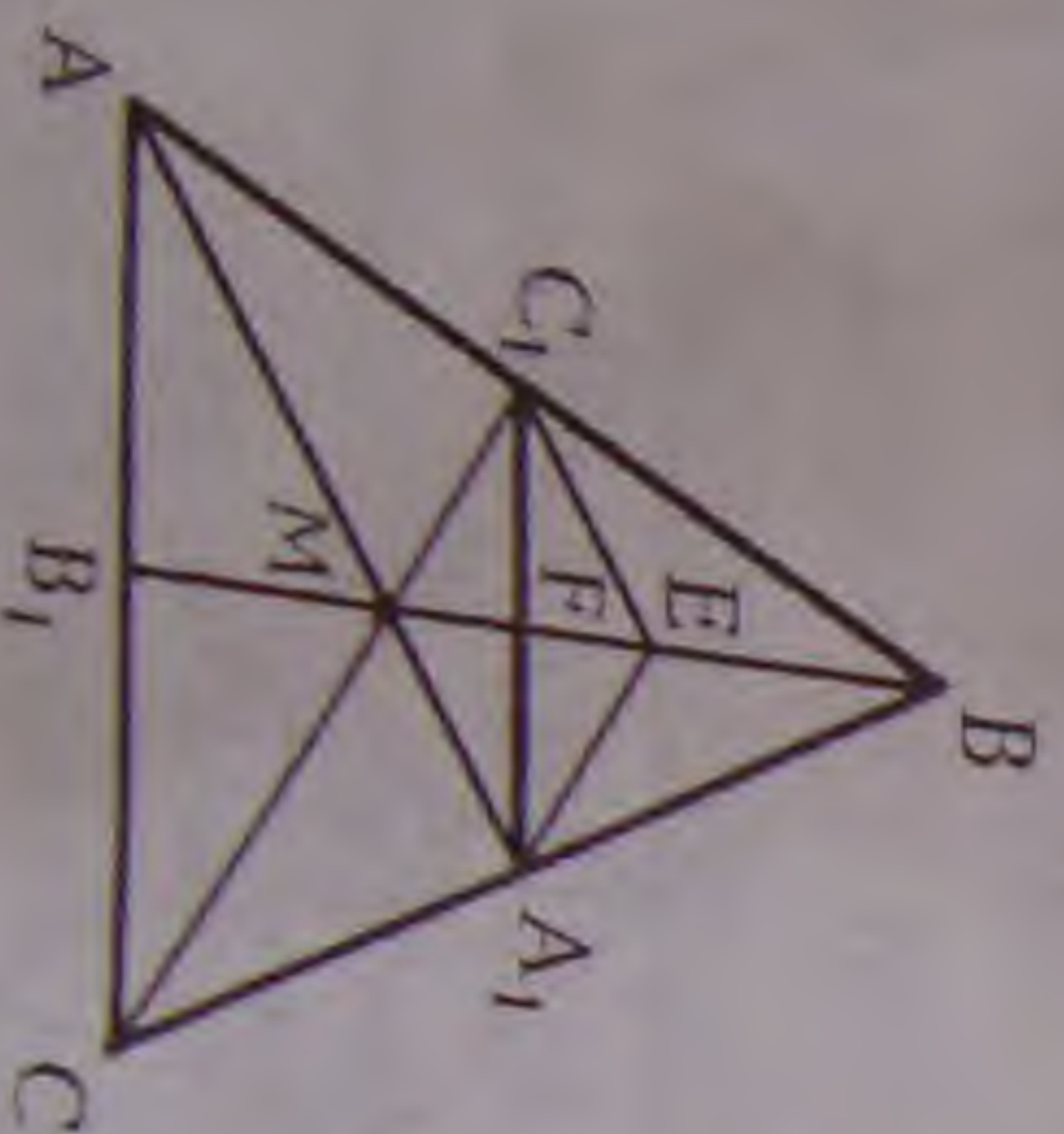
**25 Թեորեմ եռանկյան բարձրությունների հապման կետի մասին:** Մենք ապացուցել ենք, որ եռանկյան կողմերի միջնուղղահայացները հատվում են մի կետում: Մի կետում են հատվում նաև կիսորդները: Պարզվում է, որ նույնպիսի հատկություն ունեն նաև եռանկյան բարձրությունները:

**Թ Ե Ռ Ի Մ:** *Եռանկյան բարձրությունները (կամ նրանց շարունակությունները) հատվում են մի կետում:*

**Ա պ ա ց ու ց ու մ:** Դիտարկենք կանայական  $ABC$  եռանկյուն և ապացուցենք, որ նրա բարձրություններն ընդգրկող  $AA_1$ ,  $BB_1$  և  $CC_1$  ուղիղները հատվում են մի կետում (նկ. 51):

$ABC$  եռանկյան յուրաքանչյուր գագաթից տանենք հանդիպակաց կողմին գուգահեռ ուղիղ: Ստացվում է  $A_2B_2C_2$  եռանկյունը:  $A$ ,  $B$  և  $C$  կետերը ստացված եռանկյան կողմերի միջնակետերն են: Իսկապես,  $AB=A_2C$  և  $AB=CB_2$ , որպես  $ABA_2C$  և  $ABCB_2$  գուգահեռագծերի հանդիպակաց կողմեր: Ուստի՝  $A_2C=CB_2$ : Նույն ձևով՝  $C_2A=AB_2$  և  $C_2B=BA_2$ : Բացի այդ, ինչպես հետևում է կառուցումից,  $CC_1 \perp A_2B_2$ ,  $AA_1 \perp B_2C_2$  և  $BB_1 \perp A_2C_2$ : Այսպիսով՝  $AA_1$ ,  $BB_1$  և  $CC_1$  ուղիղները  $A_2B_2C_2$  եռանկյան կողմերի միջնուղղահայացներն են: Հետևաբար՝ դրանք հատվում են մի կետում: Թեորեմն ապացուցված է: ✓

**26 Եռանկյան միջնագծերի հապման կետը:** Պարզվում է, որ եռանկյան միջնագծերը օժտված են բացառիկ հատկությամբ: Այդ հատկությանը հանգամանորեն կանդրադարձնանք հետագայում, այստեղ նշենք, որ *յուրաքանչյուր եռանկյան երեք միջնագիծը հատվում են մի կետում:*



Նկ. 52

Դիցուք՝  $ABC$  եռանկյան մեջ  $AA_1$  և  $CC_1$  միջնագծերը հատվում են  $M$  կետում (նկ. 52): Ապացուցենք, որ այդ  $M$  կետով անցնող  $BB_1$  հատվածը եռանկյան երրորդ միջնագիծն է: Դրա համար նախ ցույց տանք, որ  $BB_1$  հատվածը  $ABC$  եռանկյան  $C_1A_1$  միջին գիծը հատում է նրա  $F$  միջնակետում, այսինքն՝ ապացուցենք, որ  $C_1F=FA_1$ :  $AB$  կողմի  $C_1$  միջնակետով տանենք  $AA_1$ -ին գուգահեռ  $C_1E$  հատվածը: Ըստ Թալեսի բերանի՝  $BE=EM$ : Դրանից հետևում է, որ  $EA_1 \parallel MC$  ( $BCM$  եռանկյան մեջ  $EA_1$ -ը միջին գիծ է): Ստացվեց, որ  $C_1EA_1M$  քառանկյան հան-



դիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ զուգահեռ են և, ուրեմն, այն զուգահեռագիծ է: Քանի որ  $F$  կետը այդ զուգահեռագծի անկյունագծերի հատման կետն է, ապա  $C_1F=FA_1$ : Այժմ, դիտարկենք  $ABB_1$  և  $CBB_1$  եռանկյունները, որոնց մեջ  $C_1F$ -ը և  $A_1F$ -ը, համապատասխանաբար, միջին գիծ են: Ստանում ենք.  $AB_1=2C_1F=2FA_1=B_1C_1$ , այսինքն  $AB_1=B_1C_1$ : Այսպիսով  $M$  կետով անցնող  $BB_1$  հատվածը, իրոք, համընկնում է  $ABC$  եռանկյան  $B$  գագաթով անցնող միջնագծի հետ: Հետևաբար  $M$  կետում հատվում են այդ եռանկյան բոլոր միջնագծերը:

Ամփոփենք ստացված փաստերը: Յուրաքանչյուր եռանկյան հետ առնչվում են չորս կետ. միջնագծերի հատման կետը, կիսորդների հատման կետը, կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետը և բարձրությունների (կամ նրանց շարունակությունների) հատման կետը: Այս չորս կետերը կոչվում են *եռանկյան նշանավոր կետեր*:

### Խնդիրներ



**180.** Չփռված  $O$  անկյան կիսորդի  $M$  կետից տարված են այդ անկյան կողմերին ուղղահայացներ՝  $MA$ -ն և  $MB$ -ն: Ապացուցեք, որ  $AB \perp OM$ :

**181.**  $O$  անկյան կողմերը շոշափում են երկու այն շրջանագծերից յուրաքանչյուրին, որոնք  $A$  կետում ունեն ընդհանուր շոշափող: Ապացուցեք, որ այդ շրջանագծերի կենտրոնները գտնվում են  $OA$  ուղղի վրա:

**182.**  $A$  անկյան կողմերը շոշափում են  $O$  կենտրոնով և  $5$ սմ շառավիղով շրջանագիծը: Գտեք  $AO$ -ն, եթե  $\angle A = 60^\circ$ :

**183.**  $ABC$  եռանկյան  $B$  և  $C$  գագաթներին հարակից արտաքին անկյունների կիսորդները հատվում են  $O$  կետում: Ապացուցեք, որ  $O$  կետը կենտրոն է մի շրջանագծի, որին շոշափում են  $AB$ ,  $BC$  և  $AC$  ուղիղները:

**184.**  $ABC$  եռանկյան  $AA_1$  և  $BB_1$  կիսորդները հատվում են  $M$  կետում: Գտեք  $\angle ACM$  և  $\angle BCM$  անկյունները, եթե. **ա)**  $\angle AMB = 136^\circ$ , **բ)**  $\angle AMB = 111^\circ$ :

**185.**  $ABC$  եռանկյան  $BC$  կողմի միջնուղղահայացը  $D$  կետում հատում է  $AC$  կողմը: Գտեք. **ա)**  $AD$ -ն և  $CD$ -ն, եթե  $BD = 5$ սմ,  $AC = 8.5$ սմ, **բ)**  $AC$ -ն, եթե  $BD = 11.4$ սմ,  $AD = 3.2$ սմ:

**186.**  $ABC$  եռանկյան  $AB$  և  $AC$  կողմերի միջնուղղահայացները հատում են  $BC$  կողմը  $D$  կետում: Ապացուցեք, որ. **ա)**  $D$ -ն  $BC$  կողմի միջնակետն է, **բ)**  $\angle A = \angle B + \angle C$ :



187.  $ABC$  հավասարասրուն եռանկյան  $AB$  կողմի միջնուղղահայացը  $BC$  կողմը հատում է  $E$  կետում: Գտեք եռանկյան  $AC$  հիմքը, եթե  $AEC$  եռանկյան պարագիծը  $27$  սմ է, իսկ  $AB=18$  սմ:

188.  $ABC$  և  $ABD$  հավասարասրուն եռանկյուններն ունեն ընդհանուր հիմք՝  $AB$ -ն: Ապացուցեք, որ  $CD$  ուղիղն անցնում է  $AB$  հատվածի միջնակետով:

189. Ապացուցեք, որ եթե  $ABC$  եռանկյան  $AB$  և  $AC$  կողմերը հավասար չեն, ապա եռանկյան  $AM$  միջնագիծը բարձրություն չէ:

190.  $ABC$  հավասարասրուն եռանկյան  $AB$  հիմքին առընթեր անկյունների կիսորդները հատվում են  $M$  կետում: Ապացուցեք, որ  $CM$  և  $AB$  ուղիղները փոխուղղահայաց են:

191.  $ABC$  հավասարասրուն եռանկյան սրույնքներից տաղված  $AA_1$  և  $BB_1$  բարձրությունները հատվում են  $M$  կետում: Ապացուցեք, որ  $MC$  ուղիղը  $AB$  հատվածի միջնուղղահայացն է:

192. Կառուցեք տրված հատվածի միջնուղղահայացը:

Լ ու թ ու մ: Պիցուք՝  $AB$ -ն տրված հատվածն է: Կառուցենք  $AB$  շառավիղով երկու շրջանագիծ, որոնց կենտրոններն են  $A$  և  $B$  կետերը (ճկ. 53): Այդ շրջանագծերը հատվում են երկու՝  $M_1$  և  $M_2$  կետերում:  $AM_1$ ,  $AM_2$ ,  $BM_1$  և  $BM_2$  հատվածները իրար հավասար են՝ որպես այդ շրջանագծերի շառավիղներ:



Ճկ. 53

Տանենք  $M_1M_2$  ուղիղը: Նկատի ունենալով, որ  $M_1$  և  $M_2$  կետերը հավասարախեռ են  $AB$  հատվածի ծայրակետերից: Ուստի՝ դրանք գտնվում են  $AB$  հատվածի միջնուղղահայացի վրա: Հետևաբար՝  $M_1M_2$  ուղիղը  $AB$  հատվածի որոնելի միջնուղղահայացն է:

193. Տրված են  $a$  ուղիղը և նրա միևնույն կողմում գտնվող  $A$ ,  $B$  կետերը:  $a$  ուղղի վրա կառուցեք այնպիսի  $M$  կետ, որը հավասարախեռ է  $A$  և  $B$  կետերից:

194. Տրված են մի անկյուն և մի հատված: Անկյան ներսում կառուցեք այն կետը, որը հավասարախեռ է տվյալ անկյան կողմերից և տրված հատվածի ծայրակետերից:

195. Կառուցեք այն եռանկյունը, որի կողմերի միջնակետերը տրված են:



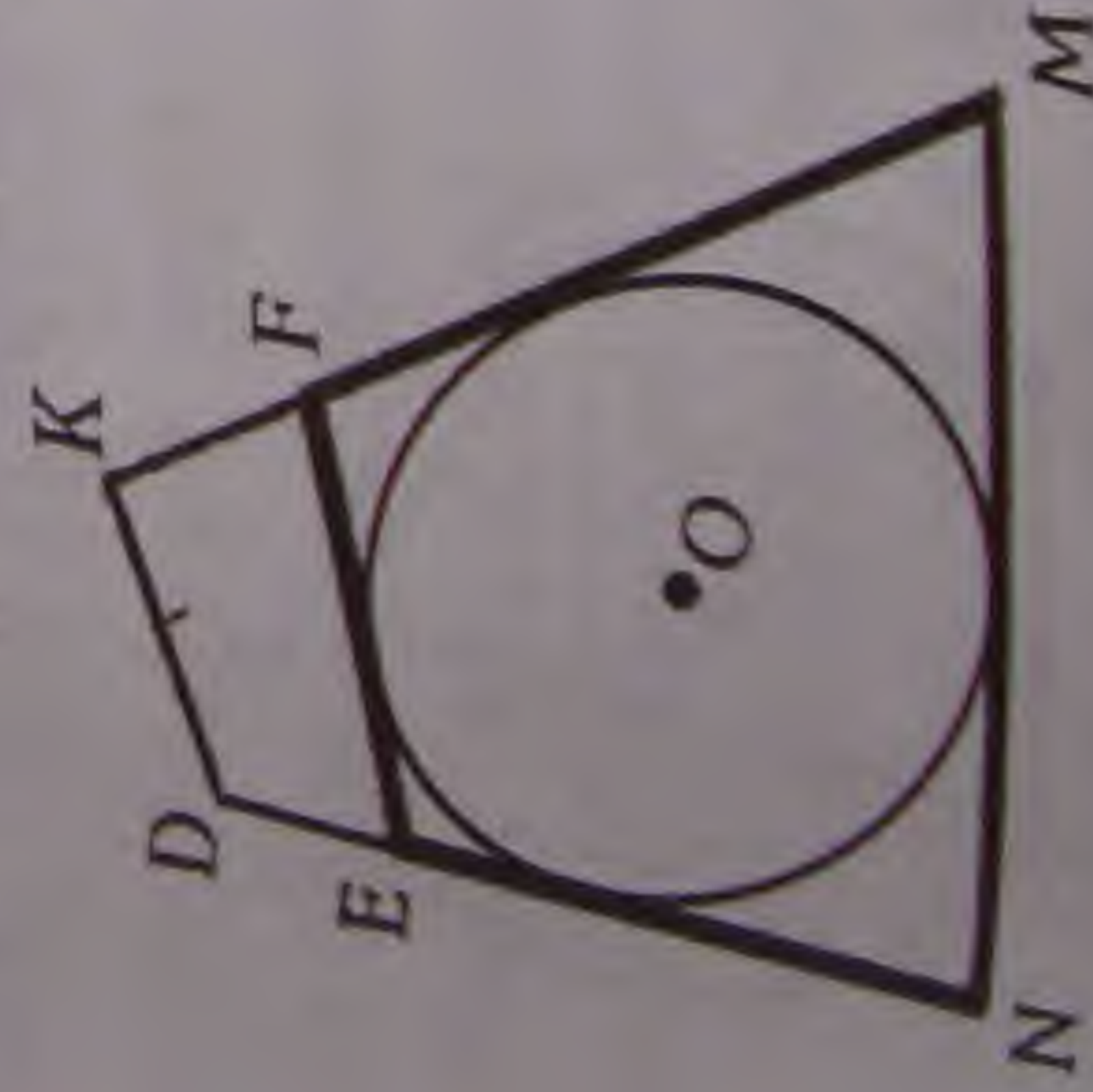


**27 Ներգծյալ շրջանագիծ:** Եթե բազմանկյան բոլոր կողմերը շոշափում են շրջանագիծը, ապա շրջանագիծը կոչվում է այդ բազմանկյանը *ներգծյալ*, իսկ բազմանկյունը՝ այդ շրջանագծին *արտագծյալ*: Նկար 54-ում  $EFMN$  բառանկյունը արտագծված է  $O$  կենտրոնով շրջանագծին, մինչդեռ  $DKMN$  բառանկյունը այդ շրջանագծին արտագծյալ է, քանի որ  $DK$  կողմը շրջանագիծը չի շոշափում: Նկար 55-ում  $ABC$  եռանկյունը արտագծված է  $O$  կենտրոնով շրջանագծին:

Ապացուցենք թեորեմ եռանկյանը ներգծյալ շրջանագծի մասին:

**Թեորեմ:** *Ցանկացած եռանկյանը կարելի է ներգծել շրջանագիծ:*

**Ապացուցում:** Դիտենք կամայական  $ABC$  եռանկյուն և  $O$  տառով նշանակենք նրա կիսորդների հատման կետը:  $O$  կետից տանենք  $OK$ ,  $OL$  և  $OM$  ուղղահայացները համապատասխանաբար  $AB$ ,  $BC$  և  $CA$  կողմերին (տես նկ. 55): Քանի որ  $O$  կետը հավասարապես է հեռացված  $ABC$  եռանկյան կողմերից, ապա  $OK = OL = OM$ : Ուստի՝  $O$  կենտրոնով և  $OK$  շառավիղով շրջանագիծն անցնում է  $K$ ,  $L$  և  $M$  կետերով:  $ABC$  եռանկյան կողմերը  $K$ ,  $L$ ,  $M$  կետերում շոշափում են այդ շրջանագիծը, քանի որ դրանք ուղղահայաց են  $OK$ ,  $OL$  և  $OM$  շառավիղներին: Ուրեմն՝  $O$  կենտրոնով և  $OK$  շառավիղով շրջանագիծը  $ABC$  եռանկյանը ներգծյալ է: Թեորեմն ապացուցված է:



Նկ. 54



Նկ. 55



դ ա ր գ ա ր ա ն ու մ . 1) Նշենք, որ *եռանկյանը կարելի է ներգծել միայն մեկ շրջանագիծ*: Իրոք, ենթադրենք, թե եռանկյանը կարելի է ներգծել երկու շրջանագիծ: Այդ դեպքում շրջանագծերից յուրաքանչյուրի կենտրոնը հավասարապես է հեռացված եռանկյան կողմերից և, ուրեմն, համընկնում է եռանկյան կիսորդների հատման  $O$  կետին: Յուրաքանչյուրի շառավիղը հավասար է  $O$  կետի եռանկյան կողմերից ունեցած հեռավորությանը: Հետևաբար՝ այդ շրջանագծերը համընկնում են:

2) Ի տարբերություն եռանկյունների, որոնց բոլորին կարելի է շրջանագիծ ներգծել, քառանկյուններից ոչ բոլորին է հնարավոր ներգծել շրջանագիծ: Դիտարկենք, օրինակ, ուղղանկյուն, որի կից կողմերը անհավասար են, այսինքն այն քառակուսի չէ: Ակնհերև է, որ այդպիսի ուղղանկյան մեջ հնարավոր է «տեղափոխել» միայն միայն երեք կողմը շոշափող շրջանագիծ (նկ. 56,ա), բայց միաժամանակ չորս կողմը շոշափող շրջանագիծ «տեղափոխելն» անհնար է: Այլ խոսքով՝ անհնար է այդպիսի ուղղանկյանը ներգծել շրջանագիծ: Եթե քառանկյանը կարելի է շրջանագիծ ներգծել, ապա մյուս կողմերն ունեն մի կարևոր հատկություն: Այն է. *ցանկացած արտագծյալ քառանկյան հանդիպակաց կողմերի գումարները հավասար են*:

Այս հատկությունը հեշտ է բացահայտվում, եթե, օգտվելով 56,բ նկարից, շոշափողների միմյանց հավասար հատվածները նշանակենք մույն տառով: Իրոք,  $AB+CD=a+b+c+d$ ,  $BC+AD=a+b+c+d$ , ուստի՝  $AB+CD=BC+AD$ :

Պարզվում է, որ ճշմարիտ է նաև հակադարձ պնդումը, այն է. *եթե ուռուցիկ քառանկյան հանդիպակաց կողմերի գումարները հավասար են, ապա նրան կարելի է ներգծել շրջանագիծ* (տե ս խնդիր 256-ը):



ա)



բ)



նկ. 57

նկ. 56



28

**Արտագծյալ շրջանագիծ:** Եթե բազմանկյան բոլոր գագաթները գտնվում են շրջանագծի վրա, ապա շրջանագիծը կոչվում է այդ բազմանկյանը *արտագծյալ*, իսկ բազմանկյունը՝ այդ շրջանագծին *ներգծյալ*:  
 Նկար 57-ում  $ABCD$  բառանկյունը ներգծված է  $O$  կենտրոնով շրջանագծին, մինչդեռ  $AECD$  քառանկյունը այդ շրջանագծին ներգծյալ չէ, քանի որ նրա  $E$  գագաթը շրջանագծի վրա չի գտնվում: Նկար 58-ում  $ABC$  եռանկյունը ներգծված է  $O$  կենտրոնով շրջանագծին:



Նկ. 58

Ապացուցենք թեորեմ եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի մասին:

**Թեորեմ:** *Ցանկացած եռանկյանը կարելի է արտագծնլ շրջանագիծ:*

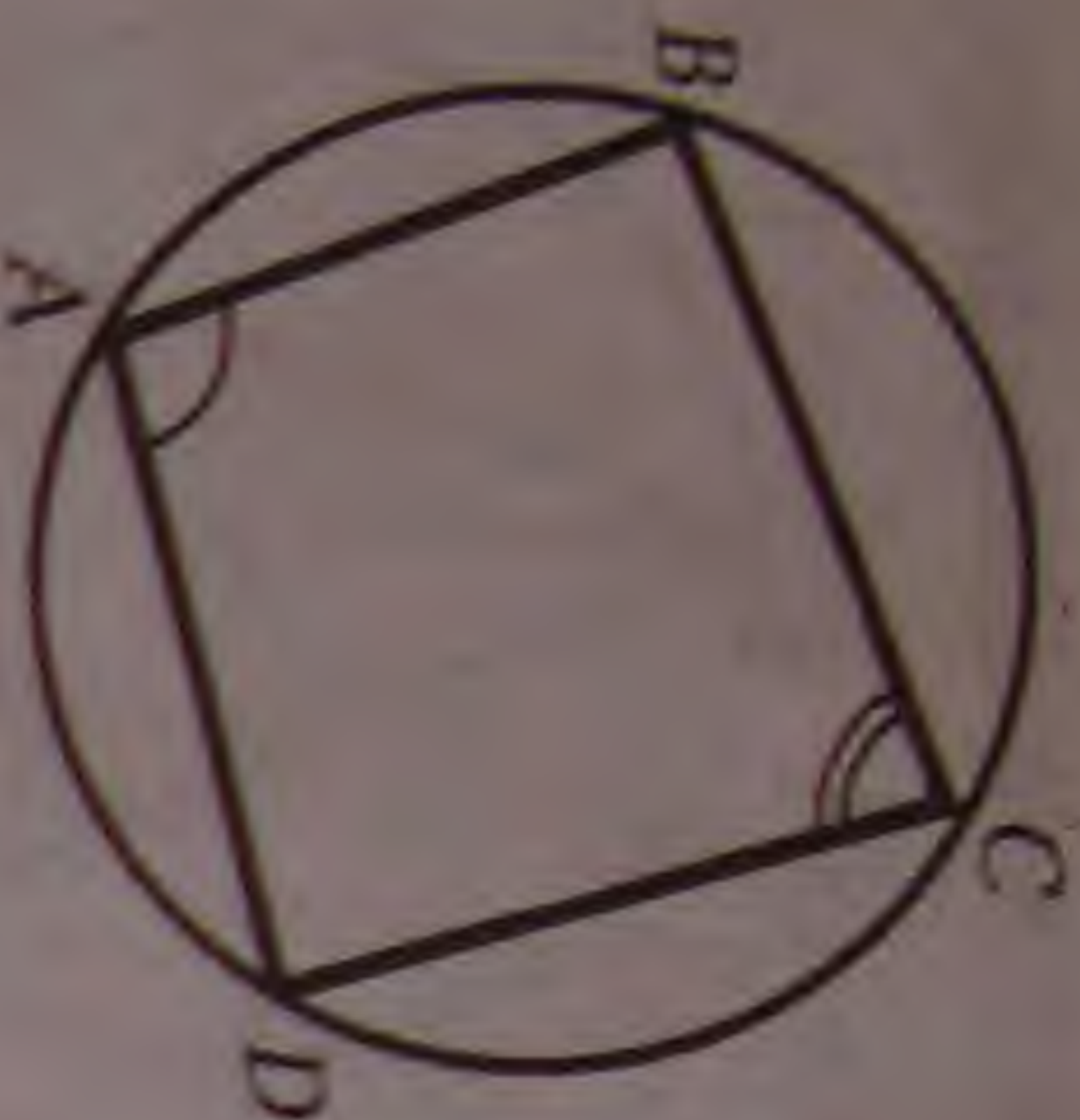
**Ապացուցում:** Այս թեորեմի ապացուցումը մենք, փաստորեն, կատարել ենք (տես 19 կետը): Դիտարկենք կամայական  $ABC$  եռանկյուն: Նրա  $A, B$  և  $C$  գագաթները չեն գտնվում մի ուղղի վրա: Ըստ երեք կետով շրջանագծի որոշման՝ այդ  $A, B$  և  $C$  կետերով կարելի է տանել շրջանագիծ, ընդ որում՝ միայն մեկը: Հետևաբար՝  $ABC$  եռանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, և այն միակն է: Եռանկյանը արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնը նրա կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետն է, որը հավասարահեռ է եռանկյան գագաթներից: Նրա շառավիղը հավասար է այդ կետի եռանկյան որևէ գագաթից ունեցած հեռավորությանը: Իսկ եռանկյան գագաթներից հավասարահեռ կետը համընկնում է նրա կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետին: Թեորեմն ապացուցված է:

**Պարզաբանում:** Ի տարբերություն եռանկյունների, որոնց բոլորին կարելի է շրջանագիծ արտագծել, քառանկյուններից ոչ բոլորին է հնարավոր արտագծել շրջանագիծ:

Օրինակ, շեղանկյանը շրջանագիծ արտագծել հնարավոր չէ, եթե, իհարկե, շեղանկյունը քառակուսի չէ (քացատրեք ինքնուրույն):

Եթե քառանկյանը կարելի է շրջանագիծ արտագծել, ապա նրա անկյուններն ունեն մի կարևոր հատկություն: Այն է. *ցանկացած ներգծյալ քառանկյան հանդիպակաց անկյունների գումարը  $180^\circ$  է:*





Նկ. 59

Այս հատկությունը հեշտ է ապացուցվում, եթե, օգտվելով 59 նկարից, կիրառենք ներգծյալ անկյունների մասին թեորեմը: Իրոք,

$$\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD, \quad \angle C = \frac{1}{2} \cup BAD, \quad \text{հետևաբար՝}$$

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\cup BCD + \cup BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

Պարզվում է, որ ճշմարիտ է նաև հակադարձ պնդումը, այն է. *եթե քառանկյան հանդիպակաց անկյունների գումարը  $180^\circ$  է, ապա այդ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ (տե՛ս խնդիր 260-ը):*



### Խնդիրներ

**196.** Ապացուցեք, որ հակասարակողն եռանկյան ներգծյալ և արտագծյալ շրջանագծերի կենտրոնները համընկնում են:

**197.** Հակասարակողն եռանկյան ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը  $r$  է: Ապացուցեք, որ այդ եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը  $2r$  է:

**198.** Եռանկյան ներգծյալ և արտագծյալ շրջանագծերի կենտրոնները համընկնում են: Կարո՞ղ է, արդյոք, այդ եռանկյունը հակասարակողն չլինել: Պատասխանը հիմնավորեք:

**199.** Ներգծյալ շրջանագծի շոշափման կետում հակասարակուն եռանկյան սրուները տրոհվում է 3սմ և 4սմ երկարությամբ հատվածների հաշված հիմքից: Գտեք այդ եռանկյան պարագիծը:

**200.** Գտեք 6սմ և 8սմ էջերով և 10սմ ներքնաձիգով ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը (տե՛ս հաջորդ համարի խնդիրը):

**201.** Ապացուցեք, որ  $a$  և  $b$  էջեր և  $c$  ներքնաձիգ ունեցող ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը հավասար է  $\frac{1}{2}(a+b-c)$ :

**Լ ու ծ ու մ:** Պիցուր՝  $ABC$ -ն  $C$  ուղիղ անկյունով ուղղանկյուն եռանկյուն է,  $O$ -ն ներգծյալ շրջանագծի կենտրոնն է,  $M$ -ը,  $N$ -ը և  $K$ -ն շոշափման կետերն են (նկ. 60): Նկատենք, որ  $ONCK$ -ն քառակուսի է, որի կողմը հավասար է որոնելի  $r$



Նկ. 60



շառավիղին: Յուրաքանչյուր անկյան գագաթը հավասարապես է հեռացված իր կողմերի և շրջանագծի շոշափման կետերից: Այսպիսով,  $CK=CN=r$ ,  $BN=BM=a-r$ ,  $AK=AM=b-r$ : Մյուս կողմից՝  $AB=AM+MB$ , այսինքն՝  $b-r+a-r=c$ : Լուծելով ստացված հավասարումը  $r$  անհայտի նկատմամբ՝ ստանում ենք.  $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$ :

202. Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը 13սմ է, իսկ էջերի գումարը՝ 17սմ: Գտեք եռանկյան ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը:

203. Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը 15սմ է, իսկ պարագիծը՝ 36սմ: Գտեք այդ եռանկյան ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը:

204. Օ-ն  $ABC$  եռանկյան ներգծյալ շրջանագծի կենտրոնն է: Գտեք  $\angle AOC$ -ն, եթե  $\angle ABC=80^\circ$ :

205.  $ABC$  եռանկյան մեջ  $\angle C=120^\circ$ ,  $AC=BC=a$ : Գտեք այդ եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը:

206. Շրջանագծին արտագծած հավասարաարուն սեղանի հիմքերը հավասար են 2սմ և 8սմ: Գտեք սեղանի պարագիծը:

207. Շրջանագծին արտագծած հավասարաարուն սեղանի հիմքերից մեկը հավասար է մյուսի եռապատիկին, իսկ սեղանի սրունքը 8սմ է: Գտեք սեղանի պարագիծը:

208. Գտեք շրջանագծին արտագծած հավասարաարուն սեղանի կողմերը, եթե նրա պարագիծը 40սմ է, իսկ հիմքերից մեկը 4 անգամ փոքր է մյուսից:

209. Հավասարաարուն սեղանին ներգծած է շրջանագիծ: Այդ սեղանի պարագիծը 60սմ է: Գտեք նրա սրունքը:

210. Հավասարաարուն սեղանի սրունքը 8սմ է, իսկ փոքր հիմքին առընթեր անկյունների գումարը՝  $300^\circ$ : Գտեք այդ սեղանին ներգծած շրջանագծի շառավիղը:

211. Ապացուցեք, որ եթե զուգահեռագծին կարելի է ներգծել շրջանագիծ, ապա այդ զուգահեռագիծը շեղանկյուն է:

212. Ապացուցեք, որ ցանկացած շեղանկյանը կարելի է ներգծել շրջանագիծ:

213. Գծագրեք երեք եռանկյուն՝ սուրանկյուն, բութանկյուն և ուղղանկյուն: Դրանց յուրաքանչյուրի համար կառուցեք արտագծյալ շրջանագիծ:

214. Շրջանագծին ներգծած է  $ABC$  եռանկյունն այնպես, որ  $AB$ -ն տրամագիծ է: Գտեք եռանկյան անկյունները, եթե  $\angle B \cup BC=134^\circ$ , եթե  $\angle AC=70^\circ$ :

215. Շրջանագծին ներգծված է  $BC$  հիմքով  $ABC$  հավասարաարուն եռանկյունը: Գտեք եռանկյան անկյունները, եթե  $\angle B \cup BC=102^\circ$ :



216. Ուղղանկյուն եռանկյանը արտագծված է շրջանագիծ: Ապացուցեք, որ նրա կենտրոնը ներքնածիզի միջնակետն է:

217.  $ABC$  եռանկյանը արտագծված է շրջանագիծ: գտեք այդ շրջանագծի շառավիղը, երբ  $AC=24$ սմ,  $\angle A=60^\circ$ ,  $\angle B=30^\circ$ :

218. Ապացուցեք, որ կարելի է շրջանագիծ արտագծել, **ա)** ցանկացած ուղղանկյանը, **բ)** ցանկացած հավասարաթև ուղղանկյուն սեղանին:

219. Ապացուցեք, որ երբ սեղանին կարելի է արտագծել շրջանագիծ, ապա սեղանը հավասարաթև է:

220. Շրջանագծին ներգծած է  $ABCD$  բառանկյունը, որի մեջ  $\angle A=104^\circ$  և  $\angle B=71^\circ$ : գտեք անկյուններ  $C$ -ն և  $D$ -ն:

221. Վերցրե՛ք կարելի՞ է տրված  $ABCD$  բառանկյանը արտագծել շրջանագիծ, երբ. **ա)**  $\angle A=64^\circ$ ,  $\angle B=95^\circ$ ,  $\angle C=106^\circ$ , **բ)**  $\angle A=72^\circ$ ,  $\angle B=69^\circ$ ,  $\angle D=111^\circ$ , **գ)**  $\angle A=90^\circ$ ,  $\angle C=90^\circ$ ,  $\angle D=80^\circ$ , **դ)**  $\angle A=2\alpha$ ,  $\angle B=5\alpha$ ,  $\angle C=7\alpha$ ,  $\angle D=4\alpha$ :

## ԿԱՌԱՌՆՑՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

29 Երկու շրջանագծերի փոխադարձ դասակարգությունը:

Հարթության վրա պատկերված երկու շրջանագծերի փոխադարձ դասակարգությունը կախված է նրանց շառավիղներից և կենտրոնների հեռավորությունից: Դիտարկենք հնարավոր դեպքերը:

ա) *Երկու շրջանագծեր կարող են լինել համակենտրոն*, այսինքն նրանց կենտրոնները համընկնում են, բայց շառավիղները հավասար չեն (նկ. 61): Այդ շրջանագծերից փոքր շառավիղ ունեցողն ընկած է մեծ շառավիղով շրջանի մեջ: Դրանցից երկրորդի շառավիղը ( $OB$ -ն) առաջին շրջանագծի հետ ունի ընդհանուր կետ ( $C$ -ն), իսկ շրջանագծերը ընդհանուր կետ չունեն:

բ) *Երկու շրջանագծեր կարող են լինել հատիկոդ*, այսինքն ունենալ երկու ընդհանուր կետ (նկ. 62): Այդպիսի դասակարգությամբ շրջանագծերի կենտրոնները, բնականաբար, չեն համընկնում, ընդ որում կենտրոնների հեռավորությունը փոքր է շառավիղների գումարից: Իրոք, երբ  $A$ -ն շրջանագծերի հատման կետ է, ապա, ըստ եռանկյան անհավասարության  $O_1A + O_2A > O_1O_2$ : Այս դեպքում կարևոր է մեկ այլ փաստ ևս. շրջանագծերի կենտրոններով անցնող  $O_1O_2$  ուղիղը այդ շրջանագծերի հատման կետերը միացնող  $AB$  հատվածի միջնուղղահայացն է (հիմնավորեք ինքներդ):



216. Ուղղանկյուն եռանկյանը արտագծված է շրջանագիծ: Ակացուցեք, որ նրա կենտրոնը ներքնաձիգի միջնակետն է:

217.  $ABC$  եռանկյանը արտագծված է շրջանագիծ: Գտեք այդ շրջանագծի շառավիղը, եթե  $AC=24$ սմ,  $\angle A=60^\circ$ ,  $\angle B=30^\circ$ :

218. Ակացուցեք, որ կարելի է շրջանագիծ արտագծել. **ա)** ցանկացած ուղղանկյանը, **բ)** ցանկացած հավասարասրուն սեղանին:

219. Ակացուցեք, որ եթե սեղանին կարելի է արտագծել շրջանագիծ, ապա սեղանը հավասարասրուն է:

220. Շրջանագծին ներգծած է  $ABCD$  քառանկյունը, որի մեջ  $\angle A=104^\circ$  և  $\angle B=71^\circ$ : Գտեք անկյուններ  $C$ -ն և  $D$ -ն:

221. Վրդյոք կարելի՞ է տրված  $ABCD$  քառանկյանը արտագծել շրջանագիծ, եթե. **ա)**  $\angle A=64^\circ$ ,  $\angle B=95^\circ$ ,  $\angle C=106^\circ$ , **բ)**  $\angle A=72^\circ$ ,  $\angle B=69^\circ$ ,  $\angle D=111^\circ$ , **գ)**  $\angle A=90^\circ$ ,  $\angle C=90^\circ$ ,  $\angle D=80^\circ$ , **դ)**  $\angle A=2\alpha$ ,  $\angle B=5\alpha$ ,  $\angle C=7\alpha$ ,  $\angle D=4\alpha$ :

## ԿԱՌԱՅՈՒՑՄԱՆ ԱՆՊԵՐՄԵՐ

**29 Երկու շրջանագծերի փոխադարձ դասավորությունը:** Հաթության վրա պատկերված երկու շրջանագծերի փոխադարձ դասավորությունը կախված է նրանց շառավիղներից և կենտրոնների հեռավորությունից: Դիտարկենք հնարավոր դեպքերը:

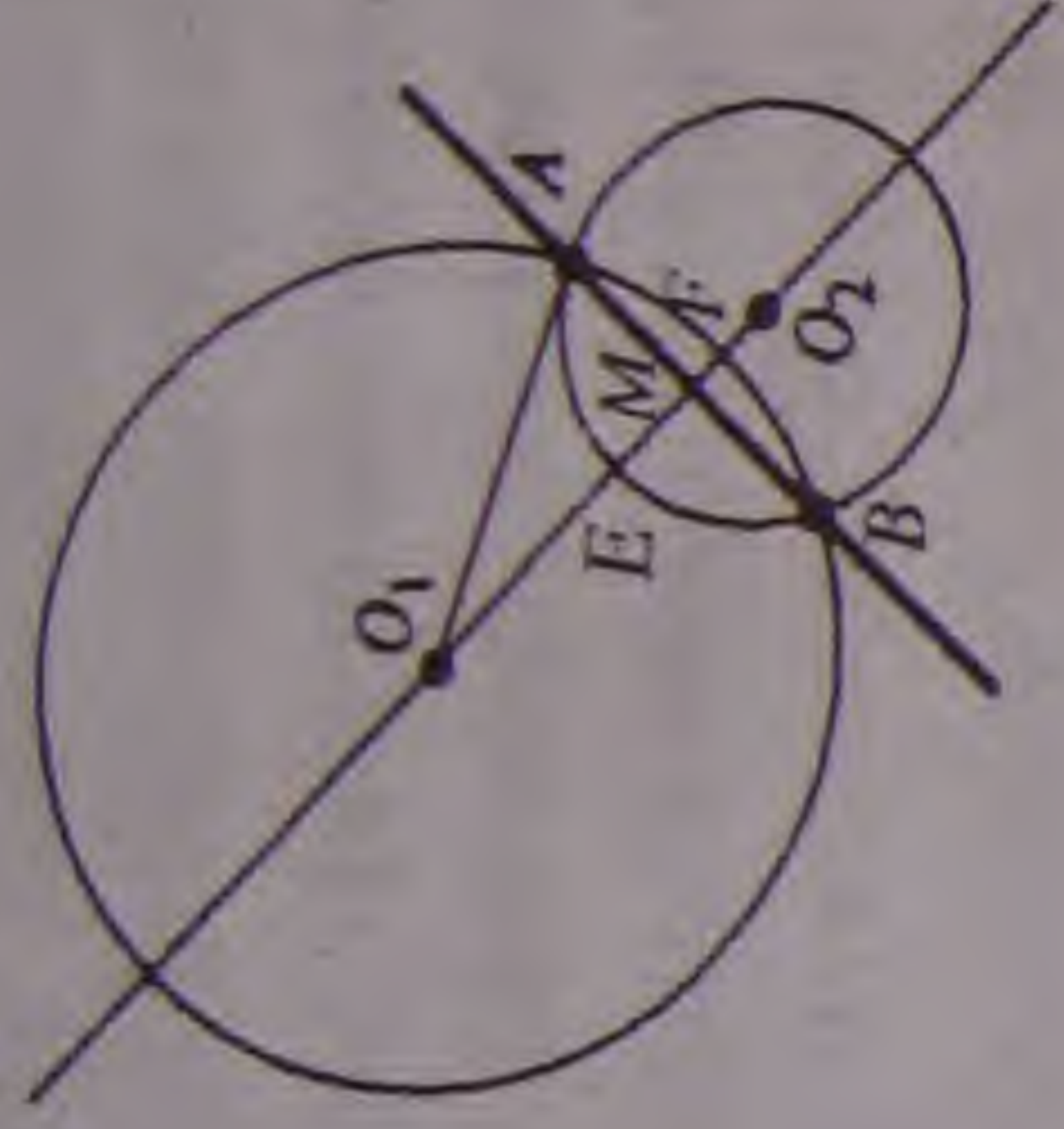
ա) *Երկու շրջանագծեր կադող են լինել համակենտրոն*, այսինքն՝ նրանց կենտրոնները հանընկցուն են, բայց շառավիղները հավասար չեն (նկ. 61): Այդ շրջանագծերից փոքր շառավիղ ունեցողն ընկած է մեծ շառավիղով շրջանի մեջ: Դրանցից երկրորդի շառավիղը ( $OB$ -ն) առաջին շրջանագծի հետ ունի ընդհանուր կետ ( $C$ -ն), իսկ շրջանագծերը ընդհանուր կետ չունեն:

բ) *Երկու շրջանագծեր կադող են լինել հատիկող*, այսինքն՝ ունենալ երկու ընդհանուր կետ (նկ. 62): Այդպիսի դասավորությամբ շրջանագծերի կենտրոնները, բնականաբար, չեն հանընկցուն, ընդ որում՝ *կենտրոնների հեռավորությունը փոքր է շառավիղների գումարից*: Իրոք, եթե  $A$ -ն շրջանագծերի հատման կետ է, ապա, ըստ եռանկյան անհավասարության՝  $O_1A + O_2A > O_1O_2$ : Այս դեպքում կարևոր է մեկ այլ փաստ ևս. *շրջանագծերի կենտրոններով անցնող  $O_1O_2$  ուղիղը այդ շրջանագծերի հատման կետերը միացնող  $AB$  հատվածի միջնուղղահայացն է* (հիմնավորեք ինքներդ):





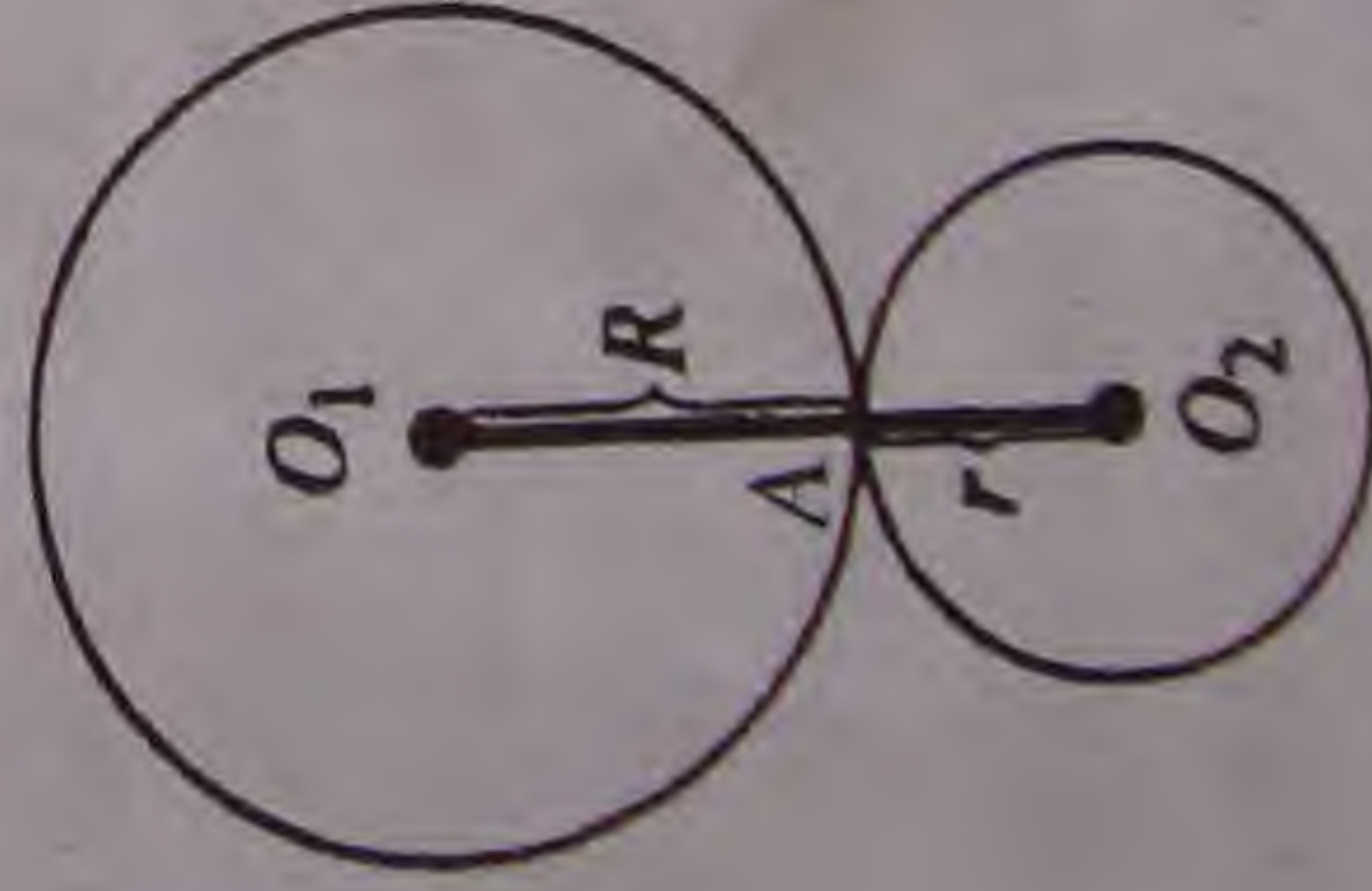
Նկ. 61



Նկ. 62

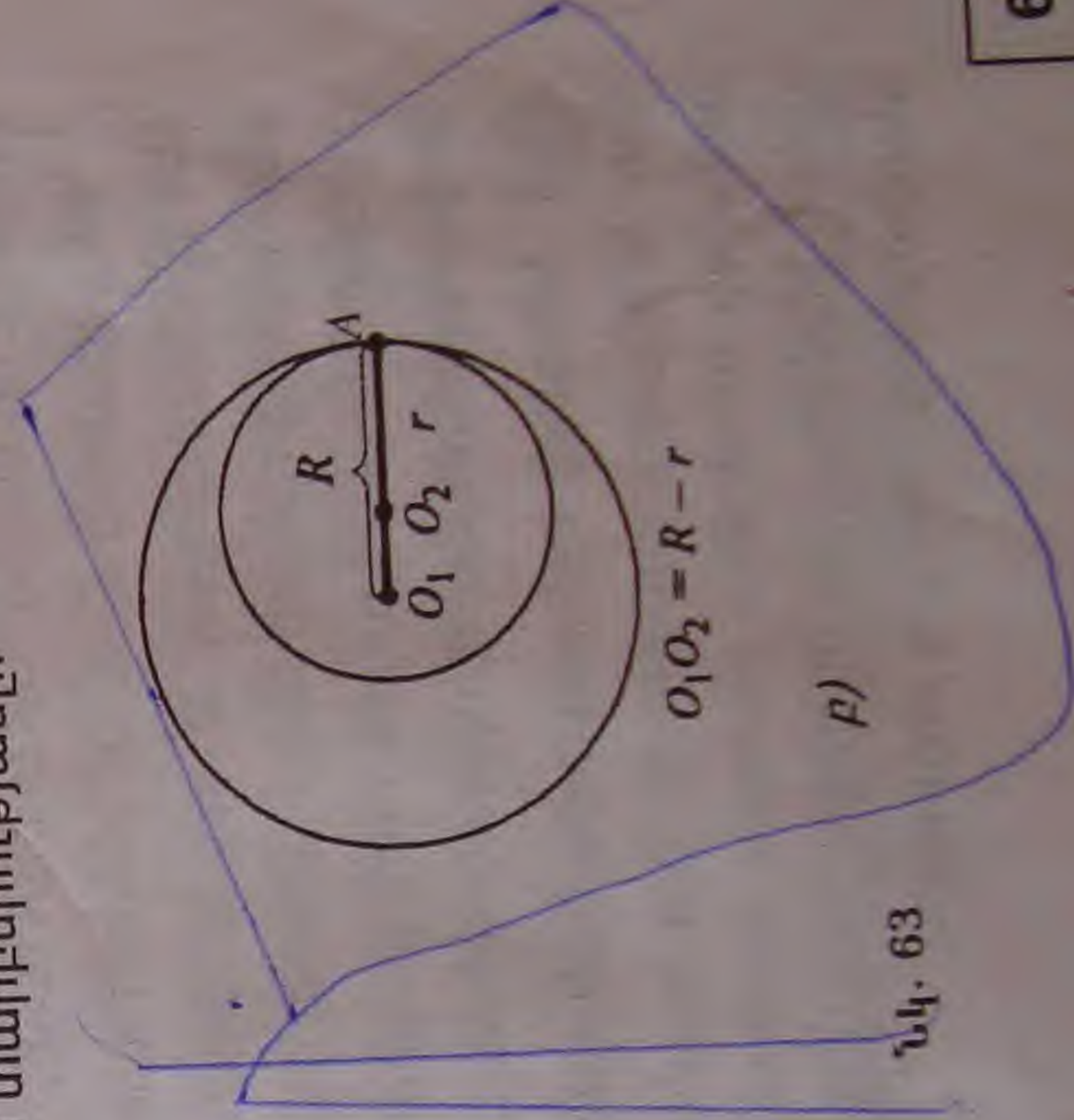
գ) Երկու շրջանագծեր կարող են ունենալ ընդհանուր մեկ կետ (Նկ. 63): Այսպիսի դասավորության համար հնարավոր է երկու դեպք: 63,ա նկարում պատկերված են  $O_1$  և  $O_2$  կենտրոններով երկու շրջանագիծ, որոնք ունեն  $A$  ընդհանուր կետը: Այս դեպքում շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը հավասար է նրանց շառավիղների գումարին.  $O_1O_2 = O_1A + AO_2$ : Եթե այս հավասարությունը տեղի չունենար, ապա կա մ  $O_1O_2$ -ը պետք է մեծ լիներ շառավիղների գումարից, կա մ՝ փոքր: Առաջին դեպքում դրանից կհետևեր, որ շրջանագծերն ընդհանուր կետ ունենալ չեն կարող: Երկրորդ դեպքում կհետևեր, որ  $A$  կետի՝  $O_1O_2$  ուղղի նկատմամբ համաչափ կետը ևս կգտնվեր շրջանագծի վրա, իսկ դա կնշանակեր, որ այդ շրջանագծերն ունեն երկու ընդհանուր կետեր:

63,բ նկարում պատկերված են  $A$  ընդհանուր կետ ունեցող երկու՝  $O_1$  և  $O_2$  կենտրոններով շրջանագծերի դասավորության մեկ այլ դիրք: Այս դեպքում շրջանագծերի կենտրոնների  $O_1O_2$  հեռավորությունը հավասար է  $O_1A$  և  $O_2A$  շառավիղների տարբերությանը:



$$O_1O_2 = R + r$$

ա)



$$O_1O_2 = R - r$$

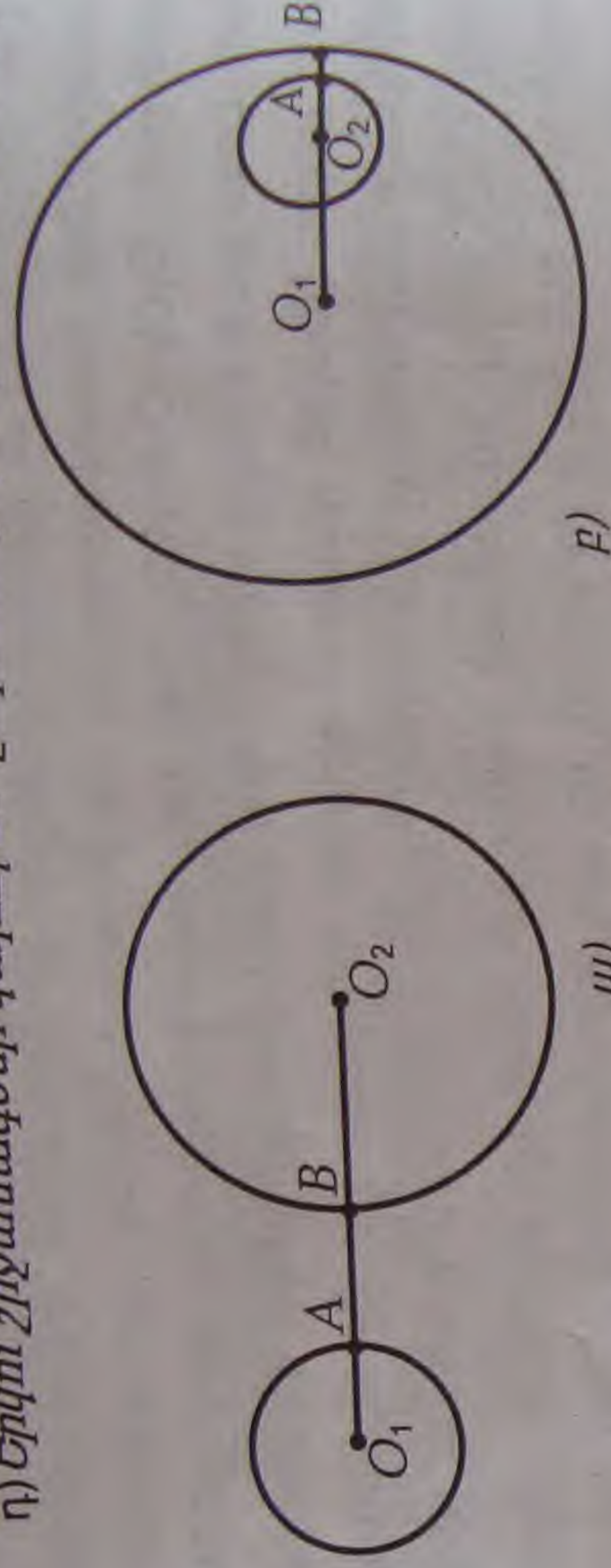
բ)

Նկ. 63



Եթե երկու շրջանագծեր ունեն մեկ ընդհանուր կետ, ապա այդ կետում շառավիղներին տարված ուղղահայացները համընկնում են: Ուրեմն՝ ընդհանուր կետում այդ շրջանագծերն ունեն ընդհանուր շոշափող: Նման դեպքերում ասում են նաև, որ *շրջանագծերն իրար շոշափում են*, ընդ որում՝ նկար 63, ա-ի դեպքում ասում են՝ *շոշափում դրսից* (կամ՝ *արտաքին շոշափում*), իսկ նկար 63, բ-ի դեպքում՝ *շոշափում ներսից* (կամ՝ *ներքին շոշափում*): Դրսից շոշափման դեպքում շրջանագծերի կենտրոններն ընկած են նրանց ընդհանուր շոշափողի տարբեր կողմերում, իսկ ներսից շոշափման դեպքում՝ միևնույն կողմում:

դ) *Երկու շրջանագծեր կարող են ընդհանուր կետ չունենալ* (նկ. 64):



նկ. 64

Այսպիսի դասավորության համար նույնպես հնարավոր է երկու դեպք: 64, ա նկարում  $O_1$  և  $O_2$  կենտրոններով շրջանագծերը չունեն ընդհանուր կետ. նրանց կենտրոնների հեռավորությունը մեծ է շառավիղների գումարից.  $O_1O_2 > O_1A + O_2B$ :

64, բ նկարում  $O_1$  և  $O_2$  կենտրոններով շրջանագծերը նույնպես չունեն ընդհանուր կետ. նրանց կենտրոնների հեռավորությունը փոքր է, քան շառավիղներից մեծը: Ավելին, այս դեպքում շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը ավելի փոքր է, քան մեծ և փոքր շառավիղների տարբերությունը (փորձեք հիմնավորել ինքնուրույն):

**30\* Կետերի երկրաչափական տեղը:** Այժմ նկարագրենք կառուցման խնդիրներ լուծելու մի նոր եղանակ: Այն լայնորեն կիրառվում է այնպիսի խնդիրներ լուծելիս, որոնցում հարկավոր է գտնել կետեր, որոնք բավարարում են երկու կամ ավելի պայմանների: Այդ եղանակը նկարագրենք հետևյալ օրինակով:



Խնդիր: Կառուցել եռանկյունը՝ ըստ տրված կողմի, դրան իջեցրած բարձրության և հանդիպակաց անկյան:

Լ ու ծ ու մ: Դիցուք՝ տրված են երկու հատված՝  $\alpha$ -ն և  $h$ -ը, և մի անկյուն՝  $\alpha$ -ն:  $\alpha$  երկարությամբ հատվածը որոնելի եռանկյան կողմերից մեկն է,  $h$ -ը՝ այդ կողմին տարած բարձրությունը, իսկ  $\alpha$ -ն հավասար է  $\alpha$  կողմի հանդիպակաց անկյանը:

Որևէ դիրքով կառուցենք  $\alpha$  հատվածը՝ որպես եռանկյան  $BC$  կողմ: Ուրեմն՝ որոնելի եռանկյան  $B$  և  $C$  գագաթները հայտնի են, մնում է գտնել  $A$  գագաթի տեղը: Դրա համար խնդիրը մասնատենք երկու խնդրի՝ յուրաքանչյուր դեպքում նկատի առնելով մյուս երկու պայմաններից մեկը:

Որոնելի եռանկյունը  $h$  բարձրություն ունենալու համար՝ նրա  $\alpha$  կողմի հանդիպակաց  $A$  գագաթը գտնվելու է այդ կողմից  $h$  հեռավորության վրա: Այդպիսի գագաթ կարող են լինել բազմաթիվ կետեր, որոնք կազմում են կետերի երկրաչափական տեղ<sup>2</sup>. այն ներկայացնում է  $BC$ -ին զուգահեռ՝ նրանից  $h$  հեռավորություն ունեցող ուղիղ (զուգահեռ ուղիղները երկուսն են, բայց կարելի է բավարարվել դրանցից մեկով):

Այժմ «աչքաթող» անենք խնդրի՝ բարձրությանը վերաբերող տվյալը և դիտենք միայն մյուս տվյալը, որը վերաբերում է հանդիպակաց անկյանը:

$\alpha$  մեծությամբ  $A$  անկյունը կարելի է դիտել որպես մի ներգծյալ անկյուն, որը հենվում է  $B$  և  $C$  ծայրերով աղեղի վրա, ընդ որում՝  $\angle B C = 2\alpha$ : Բայց այդ աղեղի վրա հենված ներգծյալ անկյունը ոչ թե մեկն է, այլ դրանց գագաթները կազմում են կետերի երկրաչափական տեղ, որը ներկայացնում է շրջանագծի աղեղ: Նկատենք, որ այդ շրջանագծի կենտրոնը կարելի է որոշել՝ կառուցելով  $BC$  հիմքով հավասարասրուն եռանկյուն, որի սրունքների կազմած անկյունը հավասար է  $2\alpha$  (այդ սրունքները կլինեն շառավիղներ):

<sup>2</sup> Կետերի երկրաչափական տեղ (կամ՝ կետերի բազմություն) կոչվում է այն պատկերը, որը բաղկացած է այն բոլոր կետերից, որոնք օժտված են որոշակի հատկությամբ:



Այսպիսով՝ որոնելի  $ABC$  եռանկյան  $A$  գագաթը միաժամանակ գտնվելու է կետերի երկրաչափական տեղերից թե մեկի, և թե մյուսի վրա: Այսինքն՝  $A$  գագաթը գտնվելու է ինչպես  $a$ -ին գուգահեռ տարված ուղղի, այնպես էլ կառուցված շրջանագծի վրա: Այդ ուղղի և շրջանագծի հատման կետն էլ կլինի եռանկյան  $A$  գագաթը: Եթե ուղիղը և շրջանագիծը ունեն երկու հատման կետ, ապա գոյություն ունի խնդրի պայմաններին բավարարող երկու լուծում: Իսկ եթե դրանք հատման կետ չունեն, ապա խնդիրը լուծում չունի:

Այսպիսով՝ կետերի երկրաչափական տեղերը գտնելու եղանակով խնդիրներ լուծելու համար անհրաժեշտ է նախ՝ կառուցել խնդրի առանձին պայմաններին բավարարող կետերի երկրաչափական տեղերը, իսկ ապա՝ որոշել դրանց ընդհանուր կետերը: Լուծման այս եղանակը դուք արդեն կիրառել եք բազմաթիվ խնդիրներ լուծելիս, ինչպես օրինակ՝ տրված երեք կողմով եռանկյունը կառուցելիս: Այնտեղ, կարկինին տալով կողմի երկարությանը հավասար բացվածք, շրջանագծի աղեղ կառուցելիս, փաստորեն, գտնում եք եռանկյան գագաթ հանդիսացող կետերի երկրաչափական տեղը:



## Խնդիրներ

- 222.** Տրված են երկու՝  $A$  և  $B$  կետեր: Գտեք այն  $C$  կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար  $AC \perp CB$ :
- 223.** Գտեք այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնք հավասարաձեռ են երկու հատվող շրջանագծերի ընդհանուր կետերից:
- 224.** Տրված է  $O$  կետը  $a$  ուղղի վրա: Գտեք այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց  $a$  ուղղից ունեցած հեռավորությունը երկու անգամ փոքր է  $O$  կետից ունեցած հեռավորությունից:
- 225.** Կառուցեք արտաքին շոշափում ունեցող երկու շրջանագիծ: Երրորդ շրջանագիծը կառուցեք այնպես, որ այն հատի և առաջին, և երկրորդ շրջանագիծը, և բոլոր շրջանագծերի կենտրոնները գտնվեն մի ուղղի վրա:
- 226.** Կառուցեք շրջանագիծը, եթե տրված են նրա լարը և այդ լարի ծայրակետերով աղեղներից մեկի աստիճանային չափը:
- 227.** Կառուցեք շրջանագիծը, եթե տրված են երկու կետ, որոնք այդ շրջանագծին արտագծած շեղանկյան հանդիպակաց կողմերի շոշափման կետերն են:



228. Կառուցեք շրջանագիծը, եթե տրված են երկու կետ, որոնք այդ շրջանագծին արտագծած քառակուսու կից կողմերի շոշափման կետերն են:

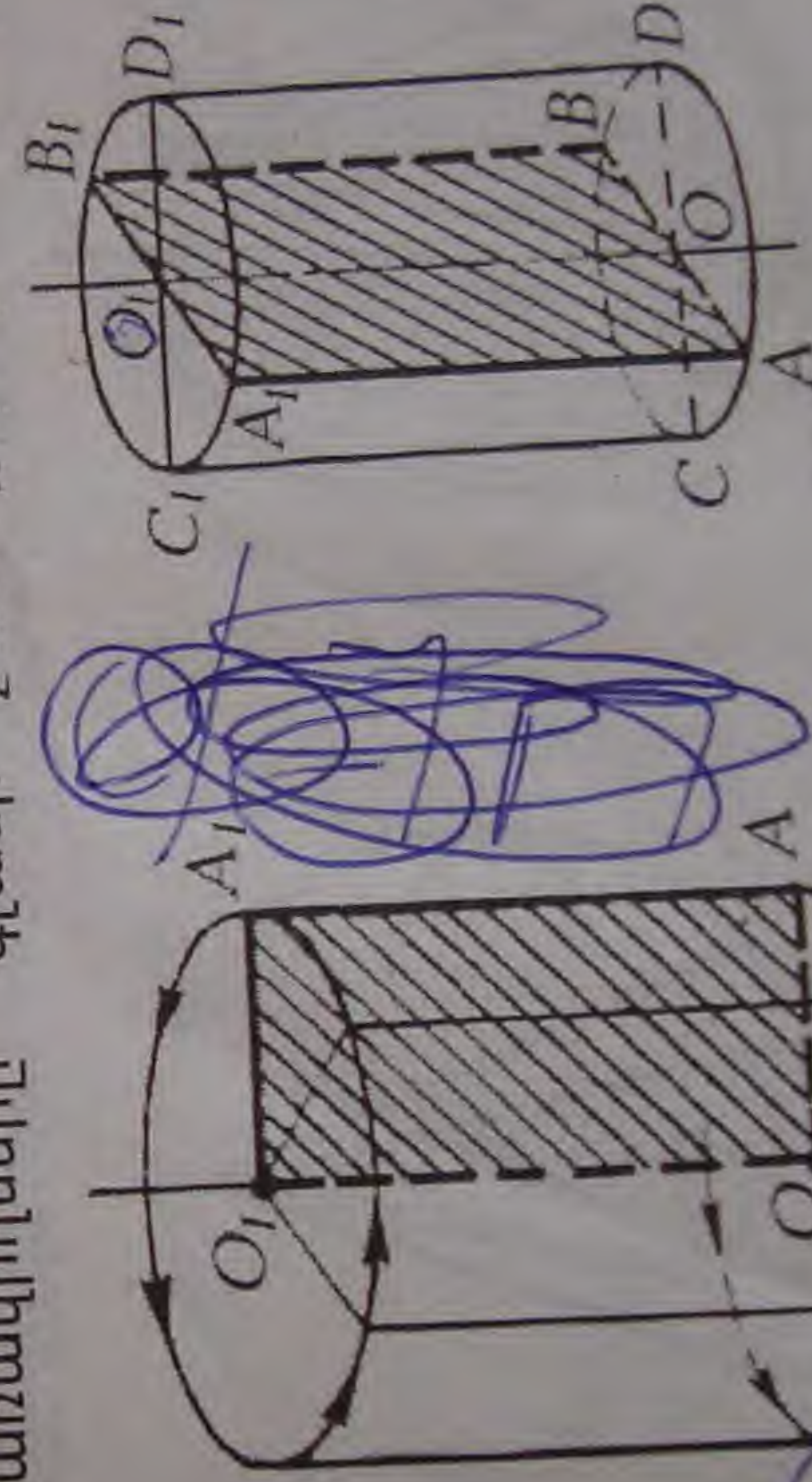
229. Կառուցեք եռանկյունը՝ նրա տրված մի կողմով և այդ կողմին տարված միջնագծով ու բարձրությունով:

230. Կառուցեք եռանկյունը՝ նրա տրված մի կողմով, նրա հանդիպակաց անկյունով և այդ կողմին տարված միջնագծով:

## § 6

### ՊԱՏԿԵՐԱՑՈՒՄ ՓԼԱՆԻ, ԿՈՆԻ ԵՎ ՓԼԴԻ ՄԱՍԻՆ

**31 Պարկերացում գլանի մասին:** Ծանոթանալով տարածական այնպիսի մարմինների, որոնց մեջ շրջանագիծը նրա մաս է և ունի կարևոր դեր: Մեր շրջակայքում և տեխնիկայում հաճախ հանդիպող այդպիսի մարմին է գլանը: Գլանի տեսք ունեն, օրինակ, խողովակները: Յուրաքանչյուր գլան մակերևույթում ունի երկու շրջան, որոնց շառավիղները հավասար են (նկ. 65): Կարելի է գլան ստանալ հետևյալ կերպ: Վերցնենք որևէ ուղղանկյուն, օրինակ,  $AA_1O_1O$  ուղղանկյունը և այն պատենք  $OO_1$  կողմի շուրջ: Ընդունենք, որ այդ ընթացքում ուղղանկյան անկյունները և կողմերի երկարությունները չեն փոխվում: Այդ պատումից առաջանում է տարածական մի մարմին, որը կոչվում է գլան (այն կոչվում է նաև ուղիղ շրջանային գլան): Շրջանների  $O$  և  $O_1$  կենտրոններով անցնող ուղիղը կոչվում է *գլանի առանցք*:  $OA$  և  $O_1A_1$  հատվածները պատելիս գծում են  $O$  և  $O_1$  կենտրոններով շրջաններ, որոնք կոչվում են գլանի *հիմքեր*, իսկ դրանց շառավիղները՝ գլանի *շառավիղներ*: Գլանի առանցքն



Նկ. 65



ընդգրկող հարթությունը գլանի հետ ունի ընդհանուր մաս, որը կոչվում է *առանցքային հատույթ*: գլանի առանցքային հատույթը ուղղանկյուն է, որի հանդիպակաց կողմերից երկուսը շրջանագծերի տրամագծեր են: Այդպիսի ուղղանկյան տրամագիծ չհանդիսացող կողմերը կոչվում են գլանի *ծնորդներ*: Նկար 65-ում պատկերված գլանի ծնորդներ են  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  հատվածները:

*Գլանի ծնորդները միմյանց հախապար են:*

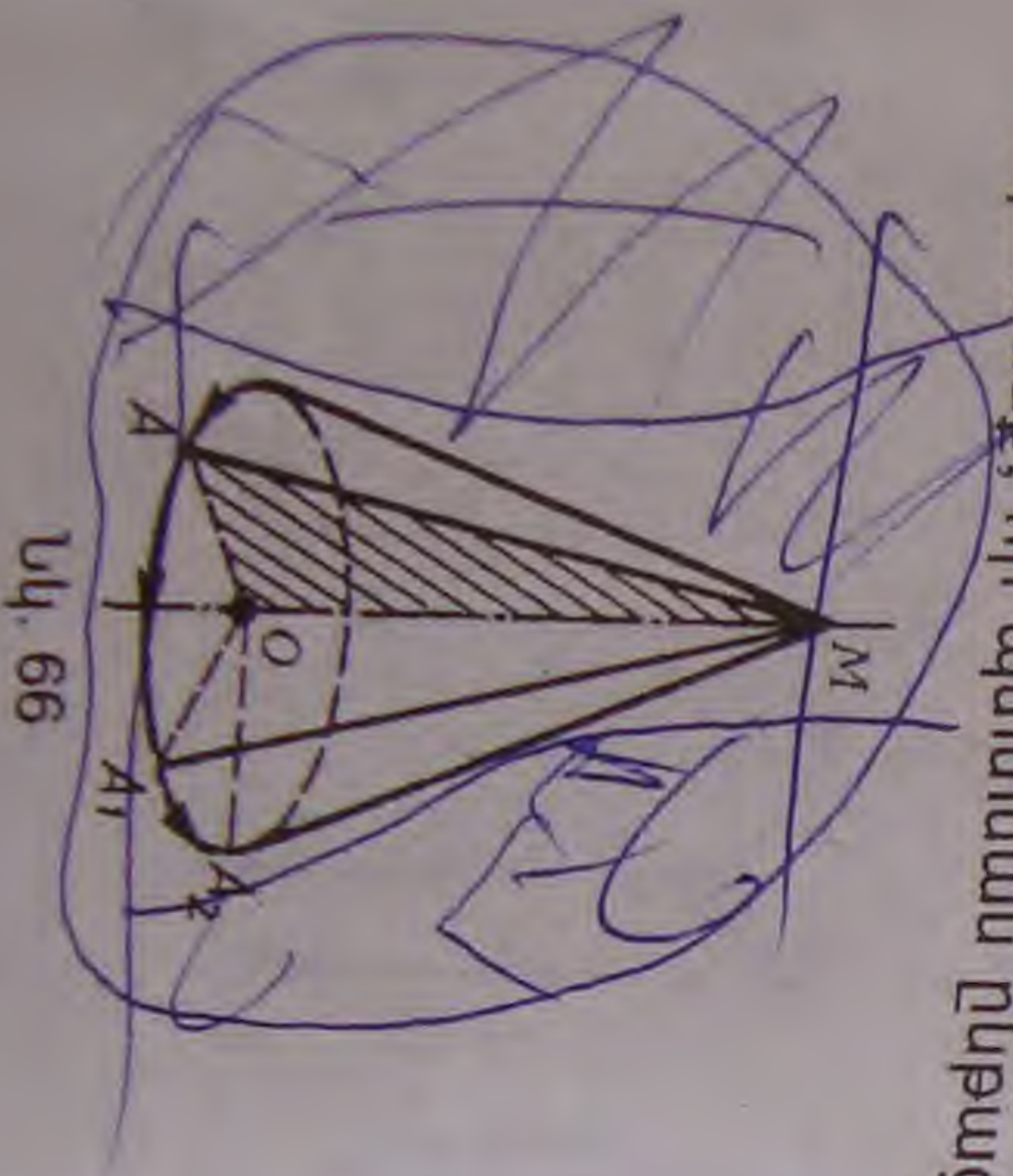
Իրոք, քանի որ  $AA_1=OO_1$ ,  $CC_1=OO_1$  (որպես ուղղանկյունների հանդիպակաց կողմեր), ապա  $AA_1=CC_1$ : Այսպիսով՝ գլանի ծնորդները հախապար են նրա հիմքերի շրջանների կենտրոնների հեռավորությունները և, ուրեմն, միմյանց հախապար են:

Գլանը որոշելու համար կարևոր է իմանալ նրա հիմքերի շրջանների շառավիղը և կենտրոնների հեռավորությունը (կամ՝ ծնորդի երկարությունը):

### 32 Պապկերացում կոնի մասին:

Մենք գիտենք, որ եթե ուղղանկյունը պտտում ենք կողմերից մեկի շուրջ, առաջանում է գլան: Այժմ պատկերացնենք մի մարմին, որն առաջանում է ուղղանկյուն եռանկյունն իր էջերից մեկի շուրջ պտտելիս: Այդ ձևով ստացված մարմինը կոչվում է *կոն*: Նկար 66-ում պատկերված է մի կոն, որն ստացվում է, երբ  $\triangle AOM$  ուղղանկյուն եռանկյունը պտտվում է  $MO$  էջի շուրջը: Պտտման ընթացքում  $OA$  էջը առաջացնում է շրջան, որի կենտրոնը  $O$  կետն է:  $O$  կենտրոնով և  $OA$  շառավիղով շրջանը կոչվում է այդ *կոնի հիմք*, իսկ  $M$  կետը՝ *կոնի գագաթ*: Կոնի գագաթը հիմքի շրջանագծի կետերին միացնող հատվածները ( $MA$ -ն,  $MA_1$ -ը,  $MA_2$ -ը և այլն) կոչվում են կոնի *ծնորդներ*:

Նկատենք, որ պտտման ընթացքում  $\triangle AOM$  եռանկյան անկյունները



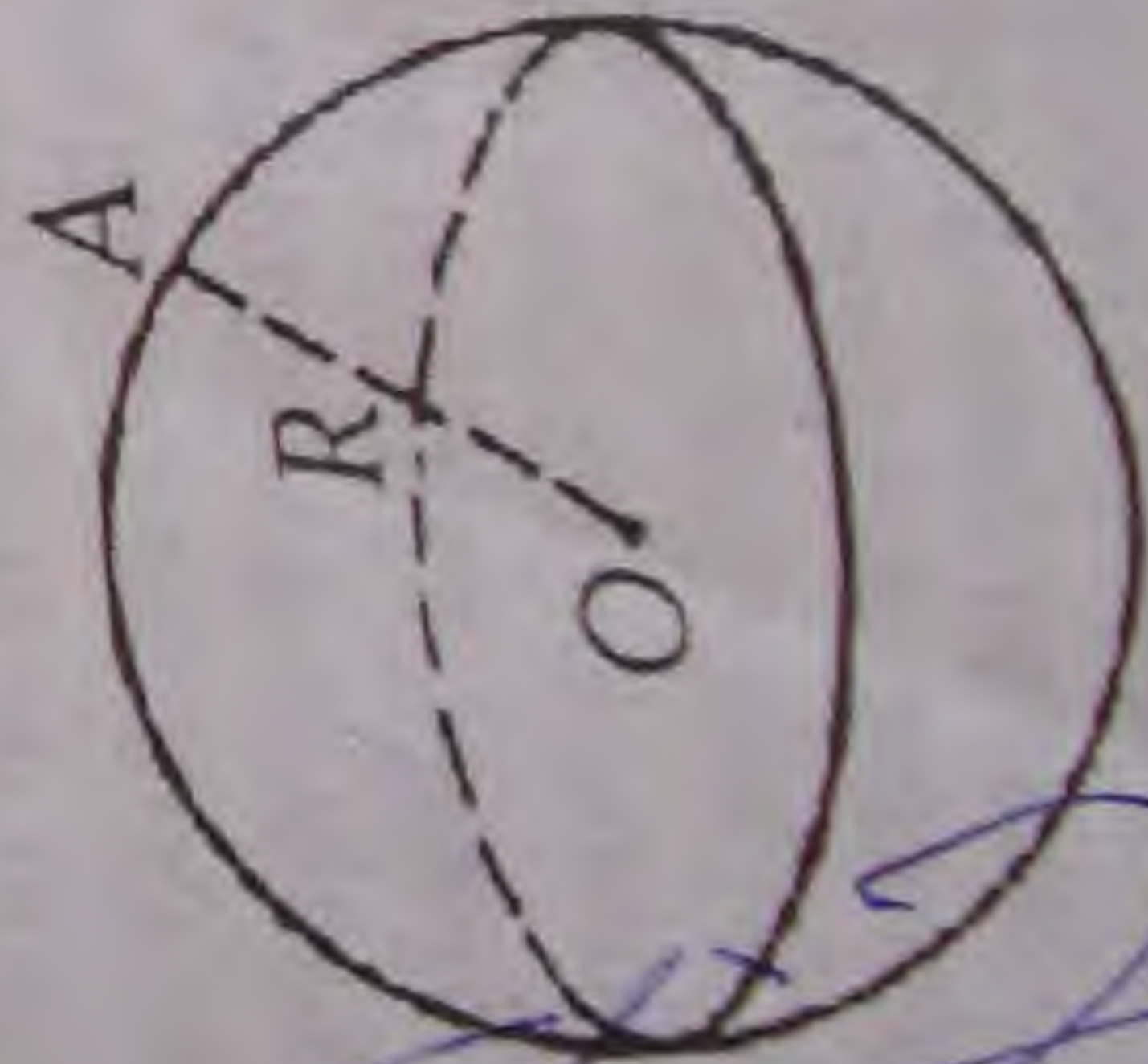


և կողմերի երկարությունները չեն փոխվում: Դրանից հետևում է, որ *կոնի բոլոր ծնորդներն իրար հավասար են:*

Կոնի գագաթով և հիմքի կենտրոնով անցնող ուղիղը ( $MO$  ուղիղը նկ. 66-ում) կոչվում է *կոնի առանցք*: Կոնի առանցքը պարունակող հարթության և կոնի ընդհանուր մասը եռանկյուն է. այն կոչվում է *առանցքային հատույթ* (նկ. 67-ում առանցքային հատույթը ստվերագծված է): Այդ եռանկյան կողմերից երկուսը կոնի ծնորդներն են և, ուրեմն, հավասար են, իսկ երրորդ կողմը հիմքի տրամագիծն է:

Այսպիսով՝ կոնի առանցքային հատույթը հավասարասրուն եռանկյուն է, ընդ որում՝ առանցքով տարված բոլոր հատույթներն իրար հավասար են:

**33 Պափկերացում գնդի մասին:** Մեր շրջակայքում հաճախակի հանդիպող տարածական մարմին է գունդը: Գունդը սահմանափակված է գնդային մակերևույթով (*գնդալորրոտ*): Գնդային մակերևույթը կոչվում է տարածական այն պատկերը, որը կազմված է տարածության բոլոր այն կետերից, որոնք տրված կետից ունեն տրված հեռավորությունը (նկ. 68,ա): Այդ կետը կոչվում է գնդի *կենտրոն*, իսկ կենտրոնը մակերևույթի որևէ կետին միացնող հատվածը՝ *առավիդ*: 68,բ նկարում  $O$  կենտրոնով գնդի շառավիղներ են  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$  հատվածները: Գնդային մակերևույթի երկու կետերը միացնող հատվածը, որն անցնում է նրա կենտրոնով, կոչվում է *տրամագիծ*: Տրամագիծը հավասար է երկու շառավիղի: Գնդային մակերևույթ կարելի է ստանալ պտտման միջոցով: Դրա համար անհրաժեշտ է կիսաշրջանագիծը պտտել տրամագծի շուրջ (նկ. 68,բ): Իսկ եթե տրամագծի շուրջ պտտենք կիսաշրջանը, ապա կառաջանա գունդ:



ա)



բ)

Նկ. 68



գնդի կենտրոնը պարունակող հարթության և գնդային մակերևույթի ընդհանուր մասը կազմված է տվյալ հարթության բոլոր այն կետերից, որոնք հավասարահեռ են կենտրոնից: Այն մերկայացնում է շրջանագիծ: Պարզվում է, որ գնդային մակերևույթի երկու կետ պարունակող հարթության և այդ մակերևույթի ընդհանուր մասը ևս շրջանագիծ է: Դրանցից մեծագույն շառավիղ ունեցողները այն շրջանագծերն են, որոնց կենտրոնը համընկնում է գնդի կենտրոնին:

Գունդը որոշելու համար կարևոր է իմանալ նրա շառավիղը, իսկ որոշ դեպքերում՝ նաև կենտրոնի տեղը: Գնդածև մարմիններ հաճախ են հանդիպում ոչ միայն մեր շրջակայքում և տեխնիկայում, այլև տիեզերքում: Երկնակամարում դուք ամեն օր տեսնում եք այդպիսի մարմիններ, որոնցից ամենապայծառ երևացողներն են Արեգակը և Լուսինը: Հիշենք, որ Երկիրը ևս գնդածև է, որի համար էլ նրան հաճախ անվանում են նաև Երկրագունդ: Երկրագնդի մեծ շրջանագծի շառավիղը մոտավորապես հավասար է 12800կմ: Իսկ որպես մեծ շրջանագիծ է ծառայում նրա *հասարակածը*, ինչը ձեզ ծանոթ է աշխարհագրությունից: Մեծ շրջանագծեր են նաև նրա *վիշօրեականները*, որոնք մերկայացնում են որպես Երկրագնդի կենտրոնով անցնող հարթության և գնդիկորտի հատումից առաջացած պատկերներ:

Ինչ վերաբերում է *գուգահեռականներին*, դրանք ևս շրջանագծեր են, սակայն ունեն համենատաքար ավելի փոքր շառավիղներ:

### Հարցեր և խնդիրներ

**231.** Գլանի առանցքային հատույթը քառակուսի է: Գտեք գլանի ծնոդի և շառավիղի երկարությունների հարաբերությունը:

**232.** Գլանի առանցքային հատույթը 40սմ պարագծով մի ուղղանկյուն է, որի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են: Գտեք գլանի շառավիղը:

**233.** Գլանի առանցքային հատույթը մի ուղղանկյուն է, որի անկյունագիծը ծնոդի հանդիսացող կողմի հետ կազմում է  $60^\circ$ -ի անկյուն: Գտեք այդ անկյունագիծը, եթե գլանի ծնոդի երկարությունը 6սմ է:

**234.** Գլանածև բաժակը կիսով չափ լցված է հյութով: Հյութը դատարկվելուց հետո նրա մակերևույթի հետքը մնացել էր բաժակի պատերին: Երկրաչափական ի՞նչ պատկեր է այդ հետքը: Համեմատեցեք այդ պատկերը բաժակում եղած այլ պատկերների հետ:

**235.** Գլանածև ցիստերնի մի մասը լցված է հեղուկով: Ի՞նչ պատկեր է հեղուկի մակերևույթը: Դիտարկեք ցիստերնի տեղադրման երկու դեպք՝ ուղղաձիգ և հորիզոնական:



236. 30° անկյուն ունեցող ուղղանկյուն եռանկյունը պտտվում է մեծ եջի շուրջ: Գտեք պտտումից առաջացած կոնի ծնորդը, եթե այդ կոնի շառավիղը 15սմ է:

237. Կոնի առանցքային հատույթը 12սմ կողմով հավասարակողմ եռանկյուն է: Որոշեք այդ կոնի շառավիղն ու ծնորդը:

238. Կոնի առանցքային հատույթը հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի ներքնաձիգը 20սմ է: Գտեք այդ կոնի շառավիղը:

239. Նկարագրեք այն մարմինը, որն առաջանում է ուղղանկյուն եռանկյունը ներքնաձիգի շուրջ պտտելիս:

240. Նկարագրեք այն մարմինը, որն առաջանում է, երբ ուղղանկյուն սեղանը պտտում ենք. **ա)** մեծ հիմքի շուրջ, **բ)** փոքր հիմքի շուրջ:

241. Գնդաձև ակվարիումի մի մասը լցված է ջրով: Ի՞նչ պատկեր է ջրի մակերևույթը: Ո՞ր դեպքում ձկները կունենան մակերևութին մոտ լողալու ավելի երկար ճանապարհ:

242. Գտեք այն գնդային մակերևույթի մեծ շրջանագծի շառավիղը, որն ստացվում է 12սմ տրամագծով կիսաշրջանագիծը այդ տրամագծի շուրջ պտտելիս:

243. Ի՞նչ կարող եք ասել 7սմ տրամագծով երկու գնդային մակերևույթի փոխադարձ դասավորության մասին, եթե նրանց կենտրոնների հեռավորությունը **ա)** հավասար է 8սմ, **բ)** հավասար է 4սմ, **գ)** հավասար է 7սմ, **դ)** փոքր է 7սմ-ից, **ե)** մեծ է 9սմ-ից:

Ծ ա ն ո թ ու ն . երկու գնդային մակերևույթի փոխադարձ դասավորությունը կարող է լինել. 1) ընդհանուր կետ չունեն, 2) ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ, 3) ունեն ընդհանուր կետեր:

244. Գնդային մակերևույթի մեծ շրջանագծի վրա երեք կետեր նշված են այնպես, որ այդ շրջանագիծը բաժանված է երեք հավասար աղեղների: Ապացուցեք, որ այդ կետերը հավասարակողմ եռանկյան գագաթներ են:

## ԳԼՈՒԽ VII-ի ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

1. Պարզաբանեք երկու կետերով անցնող շրջանագիծը որոշելու հարցը:
2. Ինչպե՞ս է որոշվում շրջանագիծն իր երեք կետերով:
3. Հետազոտեք ուղղի և շրջանագծի փոխադարձ դասավորությունը համեմատելով շրջանագծի շառավիղը և կենտրոնից մինչև ուղիղը եղած հեռավորությունը: Ձևակերպեք ստացված արդյունքը:
4. Ո՞ր ուղիղն է կոշվում շրջանագծին հաստով:
5. Ո՞ր ուղիղն է կոշվում շրջանագծի շոշափող: Ո՞ր կետն է կոշվում շրջանագծի և ուղղի շոշափման կետ:



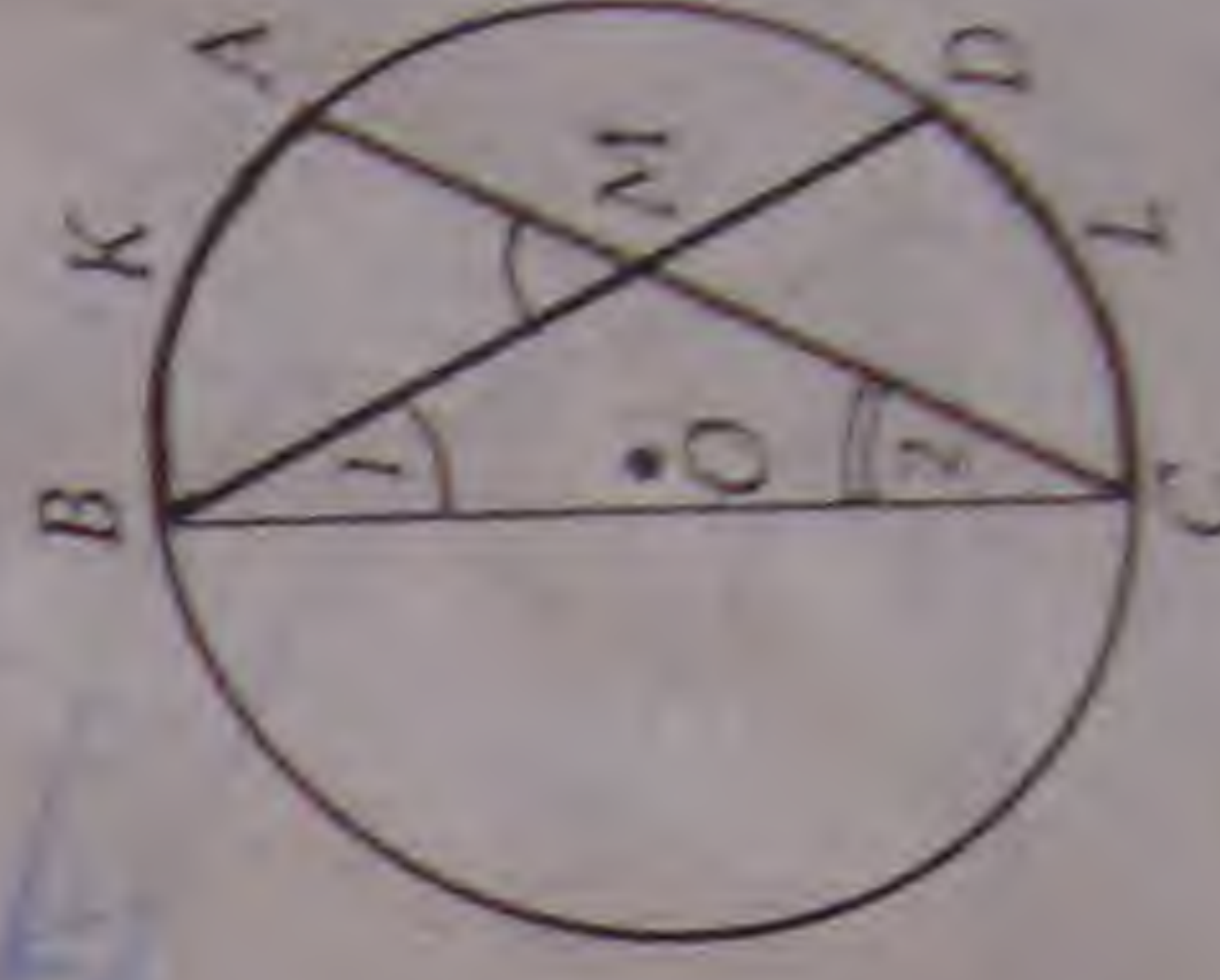
6. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեն շոշափողի հատկության մասին:
7. Ապացուցեք, որ մի կետից շրջանագծին տարված շոշափողի հատվածները հավասար են, և դրանք կազմում են հավասար անկյուններ այն ուղղի հետ, որն անցնում է այդ կետով ու շրջանագծի կենտրոնով:
8. Ձևակերպեք և ապացուցեք շոշափողի հատկության մասին թեորենի հավաքաբար թեորենը:
9. Պարզաբանեք, թե տրված շրջանագծի վրա տրված կետով ինչպես տանել շոշափող այդ շրջանագծին:
10. Ո՞ր անկյունն է կոչվում շրջանագծի կենտրոնային անկյուն:
11. Պարզաբանեք, թե որ աղեղն է կոչվում կիսաշրջանագիծ: Ո՞ր աղեղն է կիսաշրջանագծից փոքր, և ո՞րը՝ կիսաշրջանագծից մեծ:
12. Ինչպե՞ս է որոշվում աղեղի աստիճանային չափը: Ինչպե՞ս է այն նշանակվում:
13. Ո՞ր անկյունն է կոչվում ներգծյալ: Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեն ներգծյալ անկյան մասին:
14. Ապացուցեք, որ միևնույն աղեղի վրա իենված ներգծյալ անկյունները հավասար են:
15. Ապացուցեք, որ կիսաշրջանագծի վրա իենված ներգծյալ անկյունը ուղիղ է:
16. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեն անկյան կիսորդի մասին:
17. Ապացուցեք, որ եռանկյան կիսորդները հատվում են մի կետում:
18. Ո՞ր հատվածն է կոչվում հատվածի միջնուղղահայաց: Վերոհիշեք հատվածի միջնուղղահայացի հատկությունը:
19. Ապացուցեք, որ եռանկյան կողմերի միջնուղղահայացները հատվում են մի կետում:
20. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեն եռանկյան բարձրությունների հատման մասին:
21. Ձևակերպեք եռանկյան միջնագծերի հատման կետի մասին պնդումը:
22. Ո՞ր շրջանագիծն է կոչվում բազմանկյանը ներգծյալ: Ո՞ր բազմանկյունն է կոչվում շրջանագծին արտագծված:
23. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեն եռանկյանը ներգծյալ շրջանագծի մասին: Քանի՞ շրջանագիծ է կարելի ներգծել տրված եռանկյանը:
24. Ի՞նչ հատկություն ունեն շրջանագծին արտագծված քառանկյան կողմերը:
25. Ո՞ր շրջանագիծն է կոչվում բազմանկյանը արտագծյալ: Ո՞ր բազմանկյունն է կոչվում շրջանագծին ներգծած:
26. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեն եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի մասին: Քանի՞ շրջանագիծ է ինարավոր արտագծել եռանկյանը:
27. Ի՞նչ հատկություն ունեն շրջանագծին ներգծած քառանկյան անկյունները:



28. Պարզաբանք երկու շրջանագծի փոխադարձ դասավորությունը կախված նրանց շառավիղներից և կենտրոնների հեռավորությունից:
29. Նկարագրեք, թե ինչպես կարելի է ստանալ գլան: Ի՞նչ է գլանի առանցքային հատույթը:
30. Նկարագրեք, թե ինչպես կարելի է ստանալ կոն: Ի՞նչ է կոնի առանցքային հատույթը:
31. Ինչ է գնդային մակերևույթը: Ինչպե՞ս կարելի է ստանալ գնդային մակերևույթ: Ի՞նչ են մեծ շրջանագծերը:

## Լրացուցիչ խնդիրներ

245. Ապացուցեք, որ շրջանագծի տրամագիծ չհանդիսացող լարի ծայրակետերով տարված շոշափողները հատվում են:
246.  $AB$  և  $AC$  ուղիղները  $B$  և  $C$  կետերում շոշափում են  $O$  կենտրոնով շրջանագիծը:  $BC$  աղեղի կամայական  $X$  կետով տարված է այդ շրջանագծին շոշափող, որը  $M$  և  $N$  կետերում հատում է  $AB$  և  $AC$  հատվածները: Ապացուցեք, որ  $AMN$  եռանկյան պարագիծը և  $MON$  անկյան մեծությունը կախված չեն  $BC$  աղեղի վրա  $X$  կետի ընտրությունից:
- 247\*. Երկու շրջանագծեր ունեն ընդհանուր կետ՝  $M$ -ը, և այդ կետում ընդհանուր շոշափող:  $AB$  ուղիղը շոշափում է շրջանագծերից մեկը  $A$  կետում, իսկ մյուսը՝  $B$  կետում: Ապացուցեք, որ  $M$  կետը գտնվում է  $AB$  տրամագծով շրջանագծի վրա:
248. Շրջանագծի  $AA_1$  տրամագիծը ուղղահայաց է  $BB_1$  լարին: Ապացուցեք, որ կիսաշրջանագծից փոքր  $AB$  և  $AB_1$  աղեղների աստիճանային չափերը հավասար են:
249.  $A, B, C$  և  $D$  կետերը գտնվում են շրջանագծի վրա: Ապացուցեք, որ եթե  $\sphericalangle AB = \sphericalangle CD$ , ապա  $AB = CD$ :
250.  $AB$  հատվածը շրջանագծի տրամագիծ է, իսկ  $BC$  և  $AD$  լարերը զուգահեռ են: Ապացուցեք, որ  $CD$  լարը տրամագիծ է:
251. Ըստ նկար 69-ի տվյալների՝ ապացուցեք, որ
- $$\angle AMB = \frac{1}{2} (\sphericalangle CLD + \sphericalangle AKB):$$
- Լ ու ծ ու մ: Տանենք  $BC$  լարը: Քանի որ  $\angle AMB$ -ն  $BMC$  եռանկյան արտաքին անկյուն է, ապա  $\angle AMB = \angle 1 + \angle 2$ : Ըստ ներգծյալ անկյան մասին թեորեմի՝  $\angle 1 = \frac{1}{2} \sphericalangle CLD$ ,  $\angle 2 = \frac{1}{2} \sphericalangle AKB$ :
- Հետևաբար՝  $\angle AMB = \frac{1}{2} (\sphericalangle CLD + \sphericalangle AKB)$ :



Ն.Կ. 69



**252.** Երջանից դուրս վերցրած կետով տարված են այդ շրջանագծի երկու հատող: Ապացուցեք, որ դրանց կազմած անկյունը չափվում է այն աղեղների աստիճանային չափերի տարբերության, որոնք առնված են հատողների միջև:

**253.** Կարող է, արդյոք, տարվալործ եռանկյան գագաթը գտնվել եռանկյան կողմերից մեկի միջնուղղահայացի վրա: Պատասխանը հիմնավորեք:

**254.** Ապացուցեք, որ եթե ուղղանկյանը կարելի է շրջանագիծ ներգծել, ապա այն քառակուսի է:

**255.** Ապացուցեք, որ եթե սեղանի հիմքերն ընդգրկող ուղիղները շոշափում են շրջանագիծը, և շոշափման կետերը գտնվում են հիմքերի վրա, ապա սեղանի միջին գիծն անցնում է շրջանագծի կենտրոնով:

**256.** Ապացուցեք, որ եթե ուռուցիկ քառանկյան հանդիպակաց կողմերի գումարները հավասար են, ապա այդ քառանկյանը կարելի է ներգծել շրջանագիծ:

Լ ու ծ ու մ: Դիցուք  $ABCD$  ուռուցիկ քառանկյան մեջ

$$AB + CD = BC + AD \quad (1)$$

$A$  և  $B$  անկյունների կիսորդաների հատման  $O$  կետը հավասարապես է հեռացված  $AD$ ,  $AB$  և  $BC$  կողմերից: Ուրեմն  $O$  կենտրոնով կարելի է տանել շրջանագիծ, որին շոշափում են այդ երեք կողմերը (նկ. 70, ա): Ապացուցենք, որ  $CD$  կողմը ևս շոշափում է այդ շրջանագիծը, և դա կնշանակի, որ տվյալ շրջանագիծը քառանկյանը ներգծյալ է:

Ենթադրենք հակառակը.  $CD$  ուղիղը կամ ընդհանուր կետ չունի շրջանագծի հետ, կամ հատում է շրջանագիծը:

Քննության առնենք առաջին դեպքը (նկ. 70, բ): Տանենք  $C_1D_1$  շոշափողը, որը գուրգառել է  $CD$ -ին ( $C_1$ -ը և  $D_1$ -ը այդ շոշափողի



ա)



բ) 70



հատման կետերն են  $BC$  և  $AD$  կողմերի հետ): Քանի որ  $ABC_1D_1$ -ը շրջանագծին արտագծյալ քառանկյուն է, ապա ըստ նրա կողմերի հատկության՝

$$AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1 \quad (2)$$

Քայց  $BC_1 = BC - C_1C$ ,  $AD_1 = AD - D_1D$ : Հետևաբար՝ (2) հավասարությունից ստանում ենք.  $C_1D_1 + C_1C + D_1D = BC + AD - AB$ :

Այս հավասարության աջ մասը, հաշվի առնելով (1) հավասարությունը, հավասար է  $CD$ : Այսպիսով՝ հանգում ենք հետևյալ հավասարությանը.  $C_1D_1 + C_1C + D_1D = CD$ :

Ստացվում է, որ  $C_1CDD_1$  քառանկյան կողմերից մեկը հավասար է մյուս երեք կողմերի գումարին: Իսկ դա լինել չի կարող և, հետևաբար, մեր ենթադրությունը սխալ է:

Նույն եղանակով ապացուցվում է նաև, որ  $CD$  ուղիղը չի կարող լինել շրջանագծին հատող: Հետևաբար՝  $CD$ -ն շոշափում է շրջանագիծը, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

**257.** Եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է միջնագծի վրա: Ապացուցեք, որ այդ եռանկյունը հավասարասրուն է, կամ՝ ուղղանկյուն:

**258.** Հավասարասրուն եռանկյանը ներգծած է  $O_1$  կենտրոնով շրջանագիծ, և արտագծված է  $O_2$  կենտրոնով շրջանագիծ: Ապացուցեք, որ  $O_1$  և  $O_2$  կենտրոնները գտնվում են եռանկյան հիմքի միջնուղղահայացի վրա:

**259.** Ապացուցեք, որ եթե շեղանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, ապա այդ շեղանկյունը քառակուսի է:

**260.** Ապացուցեք, որ եթե քառանկյան հանդիպակաց անկյունների գումարը  $180^\circ$  է, ապա այդ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ:

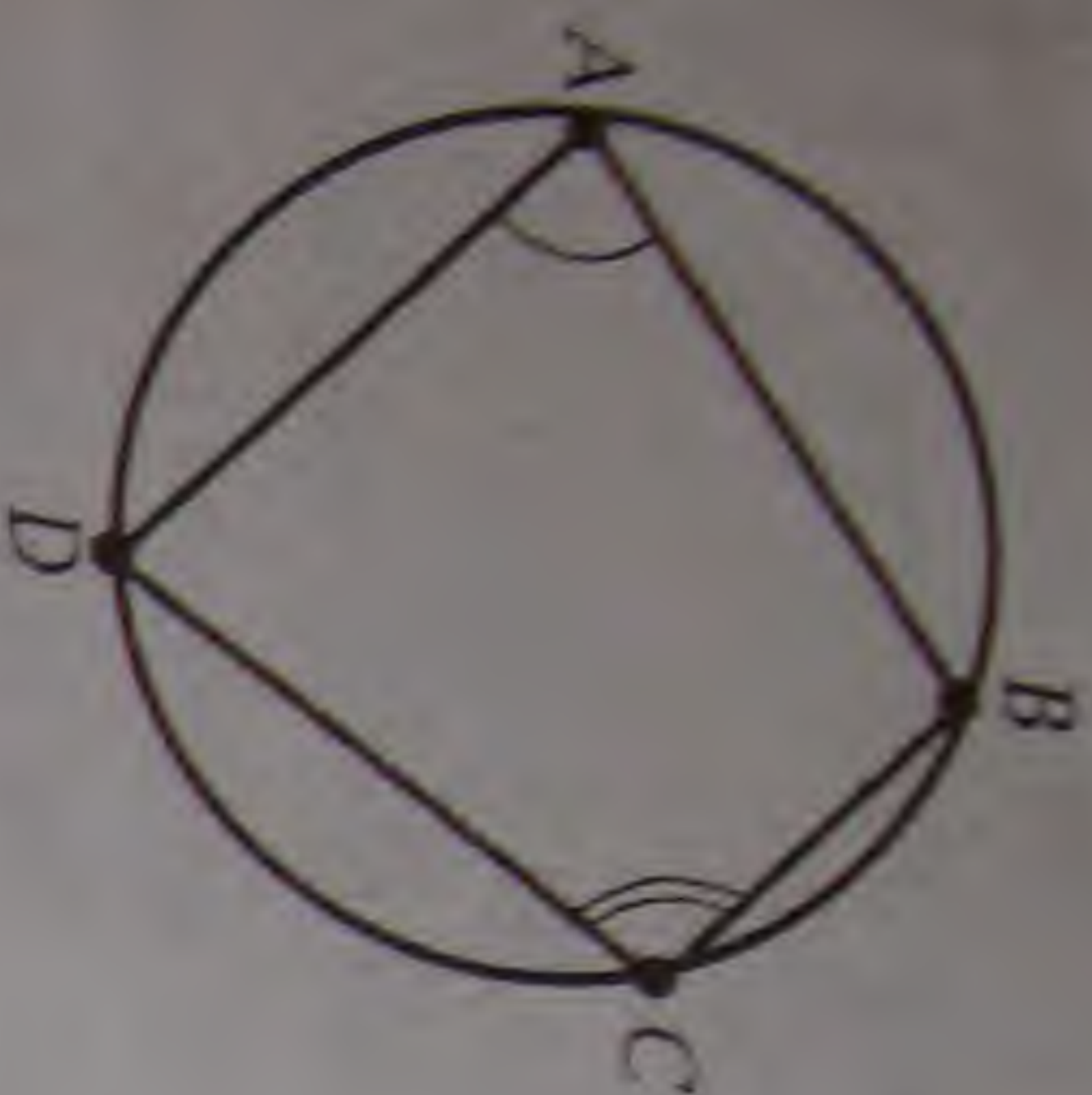
**Լ ն ի ծ ն ի մ :** Դիցուք  $ABCD$  քառանկյան մեջ  $\angle A + \angle C = 180^\circ$  (1)

Քառանկյան գագաթներից երեքով՝  $A$ -ով,  $B$ -ով և  $D$ -ով տանենք շրջանագիծ (նկ. 71,ա): Ապացուցենք, որ այն անցնում է նաև  $C$  գագաթով, և դրանից կհետևի, որ այդ շրջանագիծն արտագծված է  $ABCD$  քառանկյանը:

Ենթադրենք՝ այդպես չէ: Այդ դեպքում  $C$  գագաթը ընկած կլինի կամ շրջանից դուրս, կամ նրա ներսում: Քննության առնենք

առաջին դեպքը (նկ. 71,բ): Այս դեպքում  $\angle C = \frac{1}{2}(\cup DAB + \cup EFC)$





w)



p)

Նկ. 71

(տե՛ս խնդիր 252-ը), և հետևաբար՝  $\angle C < \frac{1}{2} \cup DAB$ : Քանի որ

$$\angle A = \frac{1}{2} \cup BED, \text{ ապա } \angle A + \angle C < \frac{1}{2} (\cup BED + \cup DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ;$$

Այսպիսով՝ ստացվում է, որ  $\angle A + \angle C < 180^\circ$ : Իսկ դա հակասում է (1) պայմանին, և, ուրեմն, մեր ենթադրությունը սխալ է:

Նույն եղանակով ապացուցվում է նաև, որ  $\angle C$  գագաթը չի կարող ընկած լինել շրջանի ներսում: Հետևաբար՝  $\angle C$  գագաթը գտնվում է շրջանագծի վրա, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

**261.**  $A$  և  $B$  կետերից տարված են  $AOB$  անկյան կողմերին ուղղահայաց ուղիղներ, որոնք հատվում են անկյան ներսում գտնվող  $C$  կետում: Ապացուցեք, որ  $ACBO$  քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ:

**262.** Ապացուցեք, որ սեղանի անկյունների կիսորդների հատումից ստացված ուռուցիկ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ:

**263.**  $ABC$  ուղղանկյուն եռանկյան մեջ  $AC$  կողմի  $M$  կետից տարված է  $AB$  ներքնաձիգին ուղղահայաց՝  $MH$ -ը: Ապացուցեք, որ  $MHC$  և  $MBC$  անկյունները հավասար են:

**264.** Ապացուցեք, որ եթե գուրգահեռագծին կարելի է և ներգծել, և արտագծել շրջանագիծ, ապա այդ գուրգահեռագիծը քառակուսի է:

**265.** Տրված են  $\alpha$  ուղիղը, նրա վրա  $A$  կետը և նրա վրա չգտնվող  $B$  կետը: Կառուցեք շրջանագիծ, որն անցնի  $B$  կետով և  $\alpha$  ուղիղը շոշափի  $A$  կետում:

**266.** Տրված են երկու գուրգահեռ ուղիղներ և մի կետ, որը չի գտնվում դրանցից ոչ մեկի վրա: Կառուցեք այդ կետով անցնող շրջանագիծ, որին այդ ուղիղները լինեն շոշափող:



# ՄԱԿԵՐԵՍ



## ԲԱԶՄԱՆԿՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

**34 Բազմակյան մակերեսի հասկացությունը:** Մակերեսի հասկացությունը մեզ ծանոթ է ամենօրյա փորձից: Ամենքն էլ հասկանում են այն խոսքի իմաստը, երբ ասվում է. սենյակի մակերեսը տասնվեց քառակուսի մետր է, այգու հողակտորի մակերեսը ութ ար է, և այլն: Այժմ մենք կդիտարկենք հարցեր, որոնք վերաբերում են բազմակյությունների մակերեսներին:

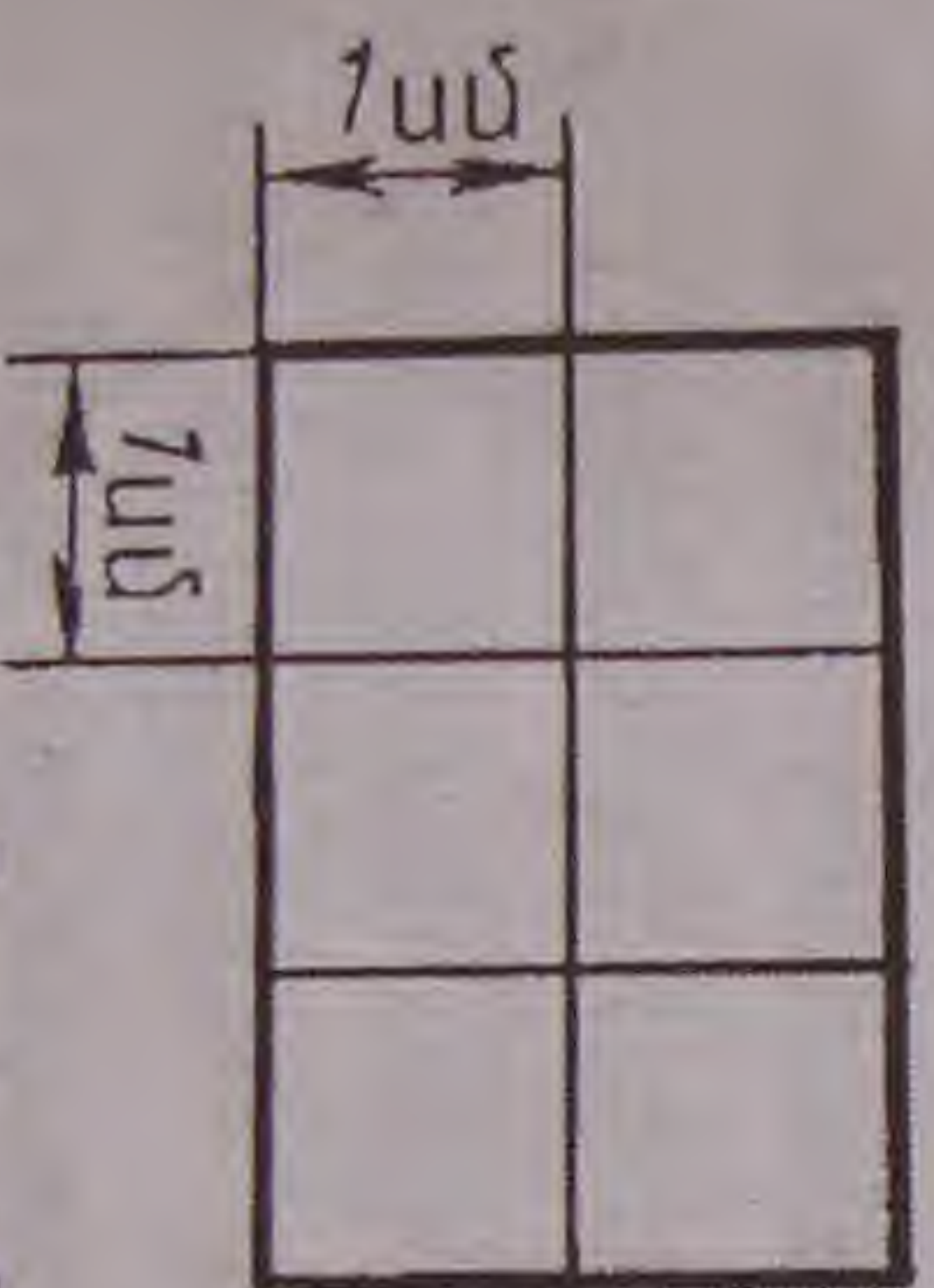
Կարելի է ասել. բազմանկյան մակերեսը հարթության այն մասի մեծությունն է, որ գրավում է այդ բազմանկյունը: Մակերեսները չափելու համար ընտրվում է չափման միավոր, և դա համանման է հատվածների երկարությունների չափմանը: Որպես մակերեսների չափման միավոր է ընդունվում այն քառակուսին, որի կողմը հավասար է հատվածների չափման միավորին: Այսպես, եթե իբրև հատվածների չափման միավոր ընդունվում է սանտիմետրը, ապա որպես մակերեսների չափման միավոր է ծառայում 1սմ կողմով քառակուսին: Այդպիսի քառակուսին կոչվում է *քառակուսի սանտիմետր* և նշանակվում է  $\text{սմ}^2$ : Նույն կերպ որոշվում է *քառակուսի մետր* ( $\text{մ}^2$ ), *քառակուսի միլիմետր* ( $\text{մմ}^2$ ) և այլն:

Մակերեսների չափման ընտրված միավորի դեպքում յուրաքանչյուր բազմանկյան մակերեսն արտահայտվում է դրական թվով: Այդ թիվը ցույց է տալիս, թե տվյալ բազմանկյան մեջ քանի անգամ են տեղավորվում ընտրված միավորն ու նրա մասերը: Օրինակ. 72.ա նկարում պատկերված է ուղղանկյուն, որի մեջ քառակուսի սանտիմետրը տեղավորվում է ճիշտ 6 անգամ: Դա նշանակում է, որ ուղղանկյան մակերեսը հավասար է  $6\text{սմ}^2$ : 72.բ նկարում պատկերված ABCD սեղանի մեջ քառակուսի սանտիմետրը տեղավորվում է երկու անգամ, բայց սեղանից մնում է մի մաս՝ CDE եռանկյունը, որի մեջ քառակուսի

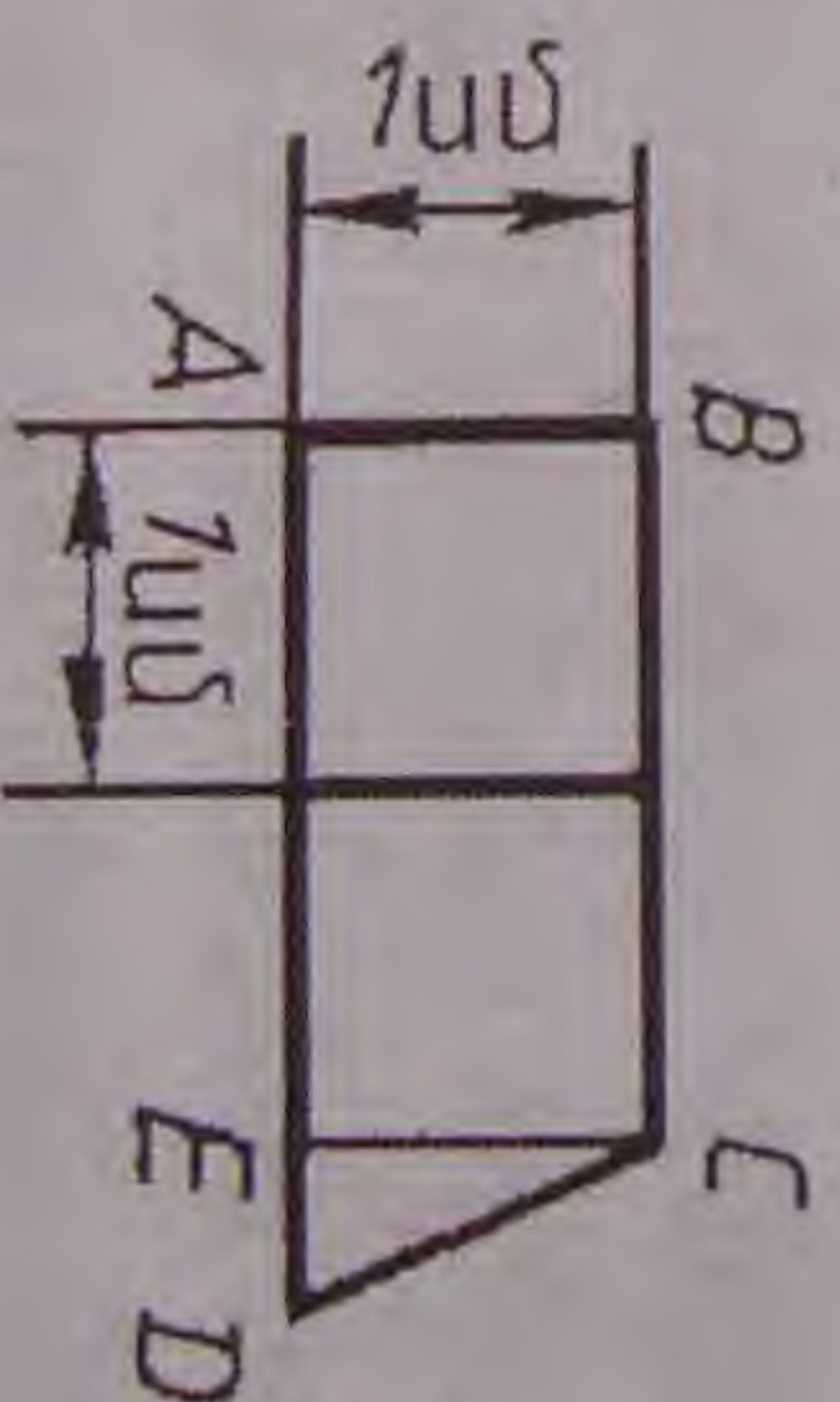


սանտիմետրը ամբողջությամբ չի տեղափոխում: Այդ եռանկյան մակե-  
րեսը չափելու համար հարկավոր է օգտագործել քառակուսի սանտի-  
մետրի մասերը. օրինակ՝ քառակուսի միլիմետրը, որը կազմում է քա-  
ռակուսի սանտիմետրի 0,01 մասը: Դա ցույց է տրված 72,գ նկարում,  
որտեղ քառակուսի սանտիմետրը տրոհված է 100 քառակուսի  
միլիմետրի (այդ և 72,դ նկարները ավելի դիտողական դարձնելու  
նպատակով պատկերված են խոշորացված մասշտաբներով): 72,դ  
նկարում երևում է, որ  $CDE$  եռանկյան մեջ քառակուսի միլիմետրը  
տեղափոխում է 14 անգամ, բայց մնում է եռանկյան այնպիսի մաս, որի  
մեջ քառակուսի միլիմետրը ամբողջությամբ չի տեղափոխվում (նկարի  
վրա այդ մասը ստիեռագծված է): Հետևաբար՝ կարելի է ասել, որ  
 $ABCD$  սեղանի մակերեսը մոտավորապես  $2,14սմ^2$  է:  $CDE$  եռանկյան  
այդ մնացած մասը կարելի է չափել քառակուսի սանտիմետրի ավելի  
փոքր մասերի օգնությամբ. այդ դեպքում ստացվում է սեղանի  
մակերեսի ավելի ճշգրիտ արժեք:

Չափման նկարագրված ընթացքը կարելի է երկար շարունակել,  
սակայն գործնականում դա այնքան էլ հարմար չէ: Սովորաբար, չա-

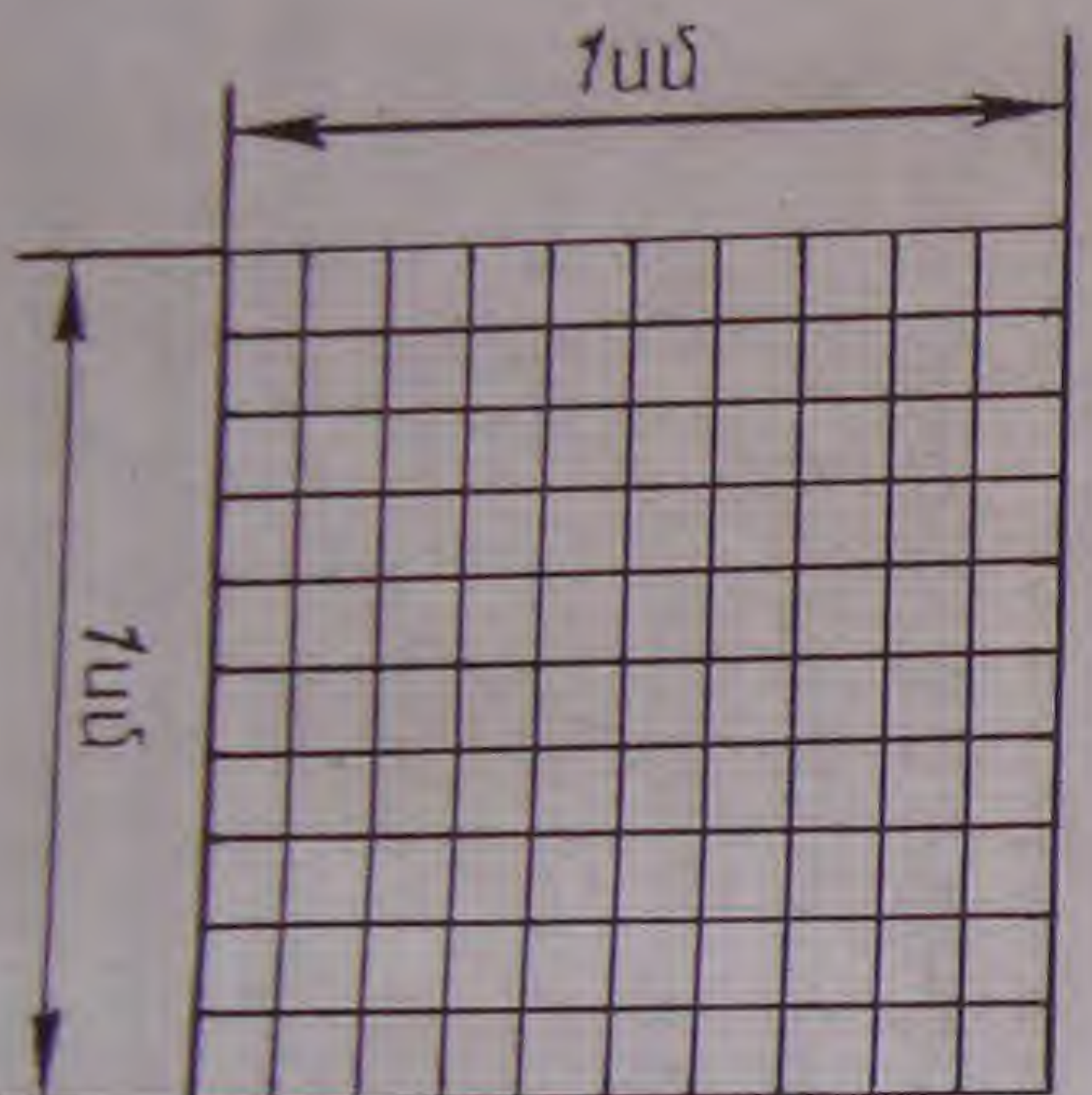


$$S = 6 սմ^2$$

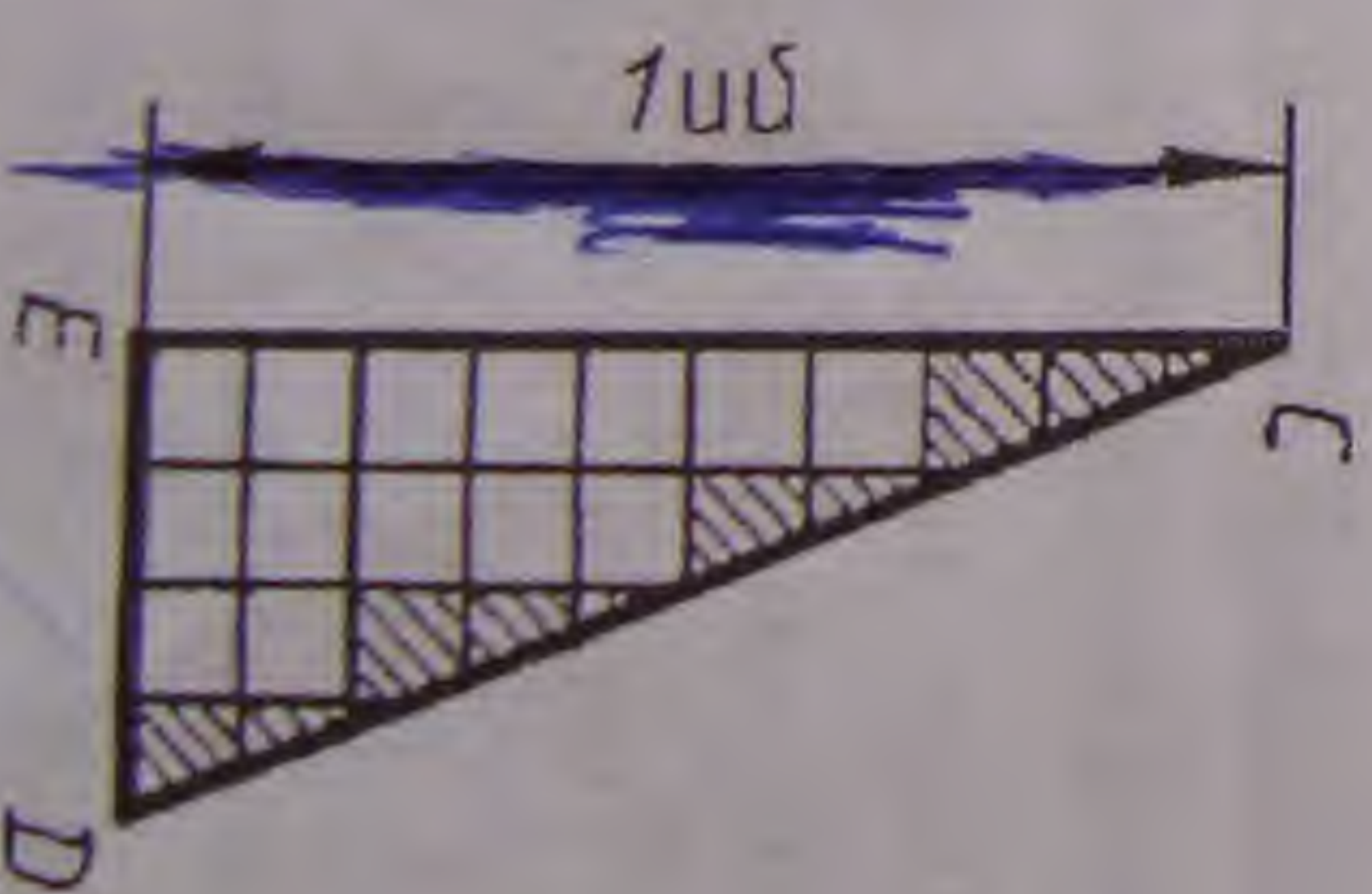


ա)

բ)



գ)



դ)

Նկ. 72



փուլում են բազմանկյունների հետ կապված որոշ հատվածները միայն, իսկ հետո մակերեսը հաշվում են որոշակի բանաձևերով: Այդ բանա-  
ձևերի արտածումը հիմնվում է մակերեսների այն հատկությունների  
վրա, որոնք մենք հիմա կդիտարկենք:

Ակզբից նշենք, որ եթե երկու բազմանկյուններ հավասար են, ապա  
մակերեսների չափման միավորն ու նրա մասերը այդ բազմանկյուն-  
ների մեջ տեղավորվում են նույնքան անգամ, այսինքն՝ տեղի ունի  
հետևյալ հատկությունը.

1°. *Հավասար բազմանկյունների մակերեսները հավասար են:*

Այնուհետև դիտարկենք բազմանկյուն, որը կազմված է մի քանի  
բազմանկյուններից (այս դեպքում ենթադրում ենք, որ այդ բազման-  
կյուններից ցանկացած երկուսը չունեն ընդհանուր մաս. տես նկար 73-ը):  
Ակնհայտ է, որ հարթության այն մասի մեծությունը, որ գրավում է ամ-  
բողջ բազմանկյունը, հանդիսանում է հարթության այն մասերի մեծու-  
թյունների գումարը, որ գրավել են նրա բաղադրիչ բազմանկյունները:

Այսպիսով.

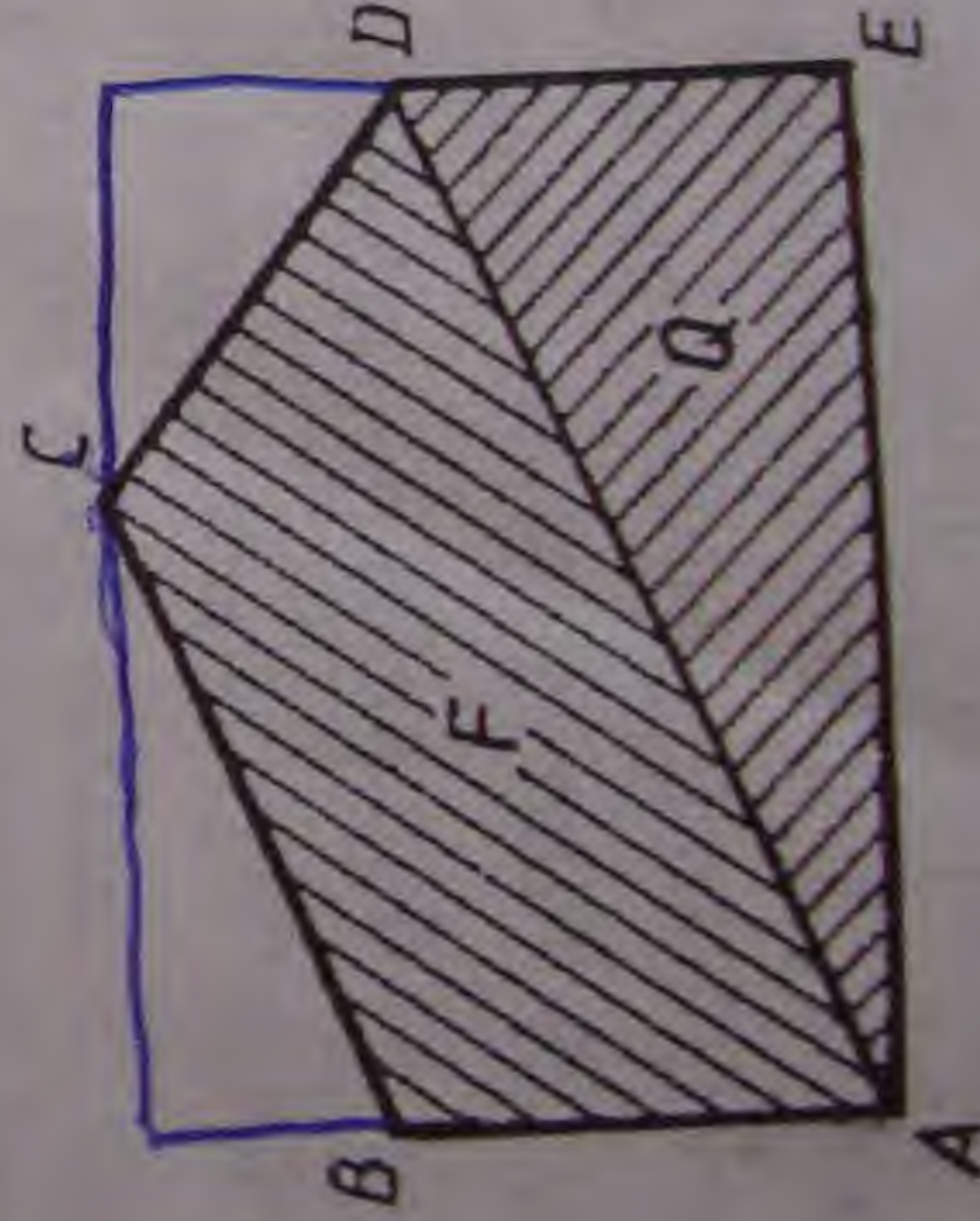
2°. *Եթե բազմանկյունը կազմված է մի քանի բազմանկյուն-  
ներից, ապա նրա մակերեսը հավասար է այդ բազմանկյուն-  
ների մակերեսների գումարին:*

1° և 2° հատկությունները համարվում են *մակերեսների հիմնա-  
կան հատկություններ*: Հիշենք, որ համանման հատկություններով  
օժտված են նաև հատվածների երկարությունները:

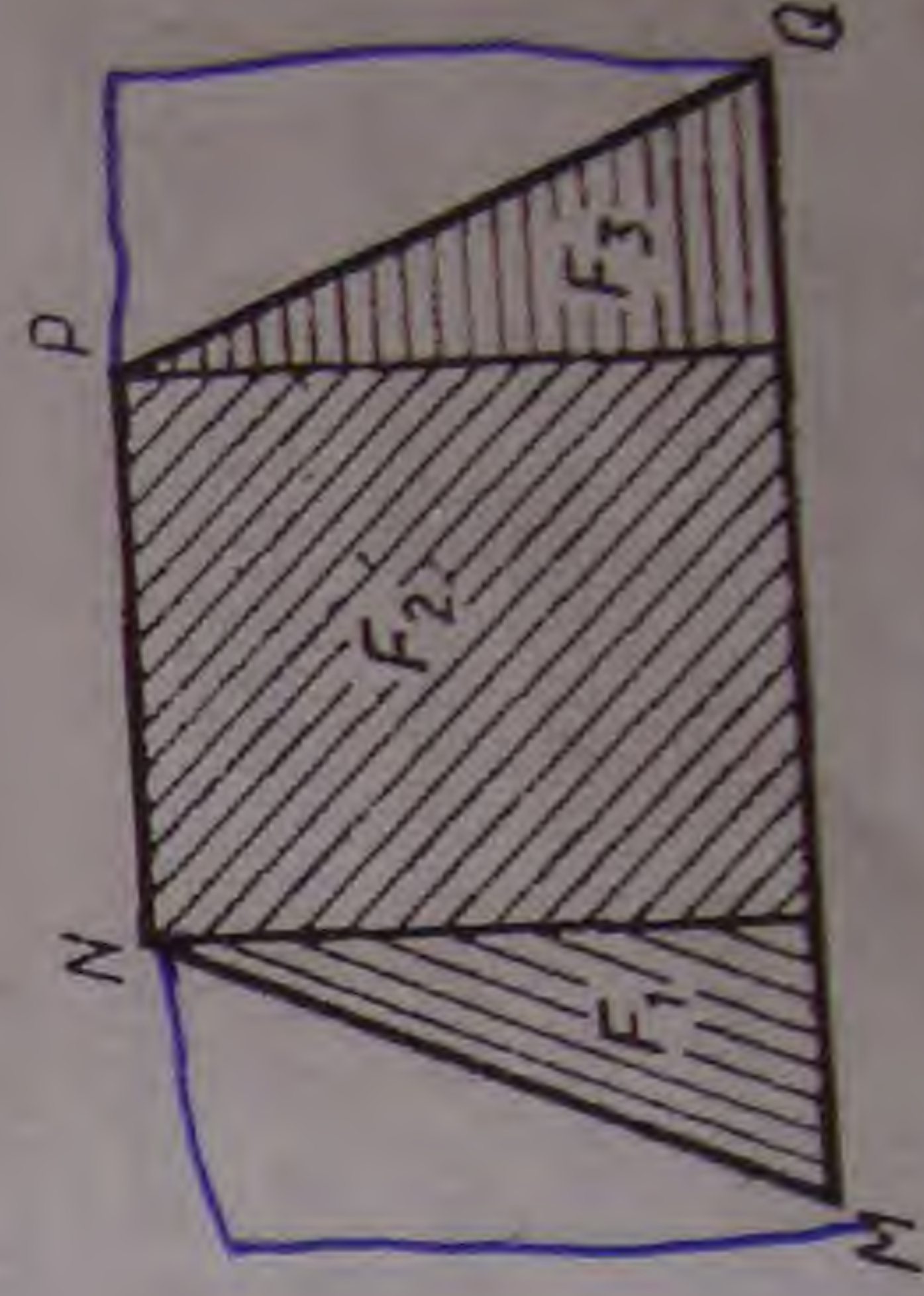
Այս հատկությունների հետ մեկտեղ մեզ պետք է գալու  
մակերեսների ևս մեկ հատկություն.

3°. *Քառակուսու մակերեսը հավասար է նրա կողմի քառակուսուն:*

Այս հատկության հակիրճ ձևակերպումը պետք է հասկանալ  
այսպես. եթե քառակուսու կողմը հատվածների չափման ընտրված



$$S_{ABCE} = S_F + S_Q$$



$$S_{MNPA} = S_{F_1} + S_{F_2} + S_{F_3}$$

Նկ. 73



միավորով արտահայտվում է  $\sigma$  բիլով, ապա այդ քառակուսու մակերեսն արտահայտվում է  $\sigma^2$  բիլով: Նկար 74-ում պատկերված է 2,1սմ կողմով քառակուսի: Այն կազմված է չորս քառակուսի սանտիմետրից և քառասունմեկ քառակուսի միլիմետրից: Այսպիսով, այդ քառակուսու մակերեսը հավասար է 4,41սմ<sup>2</sup>, որն էլ հավասար է նրա կողմի քառակուսուն. 4,41=(2,1)<sup>2</sup>:

3<sup>o</sup> պնդման ապացուցումը բերված է հաջորդ կետում:

**(35) Քառակուսու մակերեսը:** Ապացուցենք, որ  $a$  կողմով քառակուսու  $S$  մակերեսը հավասար է  $a^2$ :

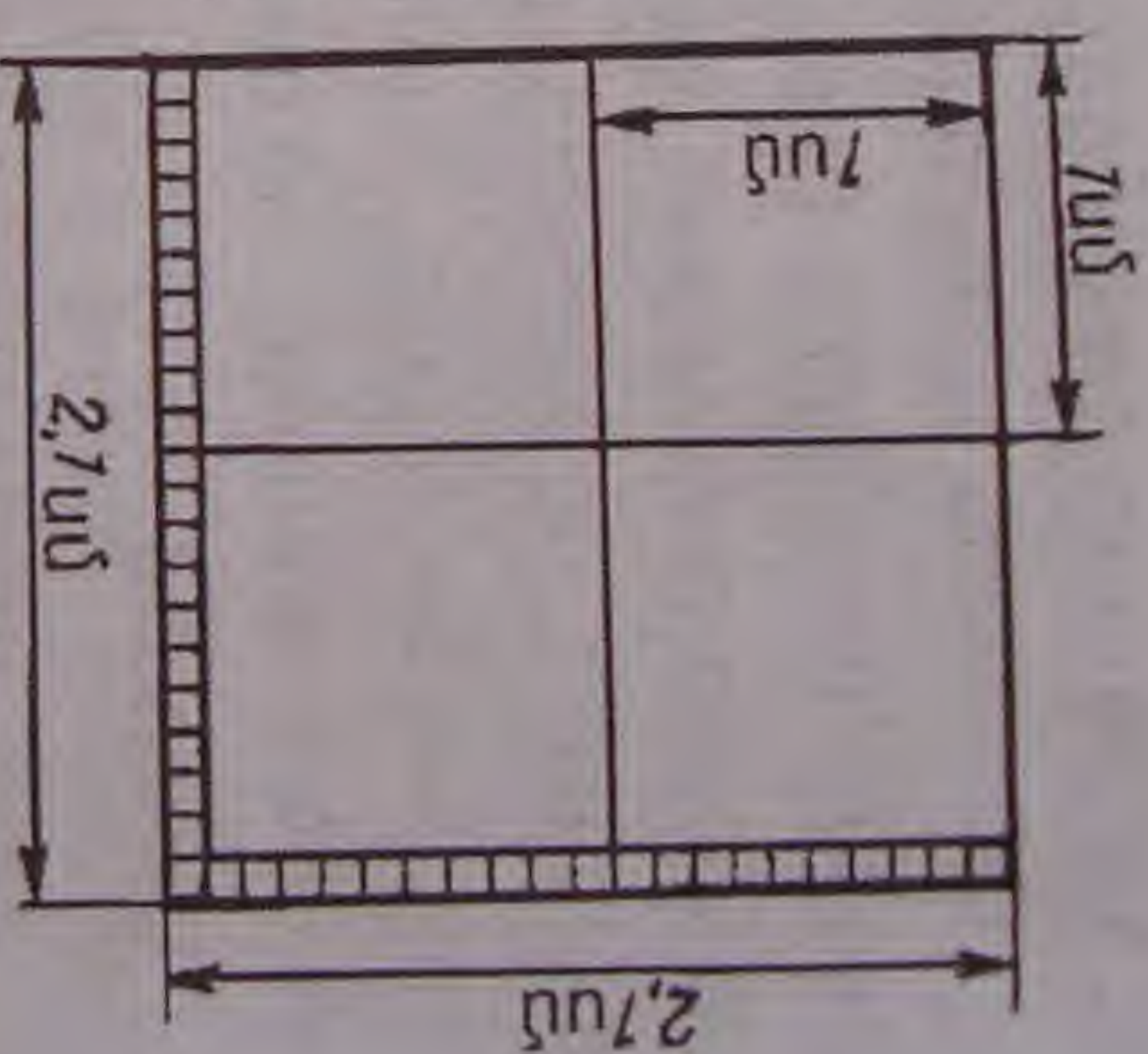
Սկսենք այն դեպքից, երբ  $a = \frac{1}{n}$ ,

որտեղ  $n$ -ը ամբողջ թիվ է: Վերցնենք 1 կողմով քառակուսի և այն տրոհենք  $n^2$  հատ հավասար քառակուսիների այնպես, ինչպես ցույց է տրված 75,ա նկարում (այս նկարում  $n=5$ ): Քանի որ մեծ քառակուսու մակերեսը հավասար է 1-ի, ուրեմն փոքր քառակուսիներից յուրաքանչյուրի մակերեսը հավասար է  $\frac{1}{n^2}$ : Յուրաքանչյուր փոքր քառակուսու կողմը հավասար է  $\frac{1}{n}$ -ի, այսինքն՝  $a$ -ի: Այսպիսով,

$$S = \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = a^2: \quad (1)$$

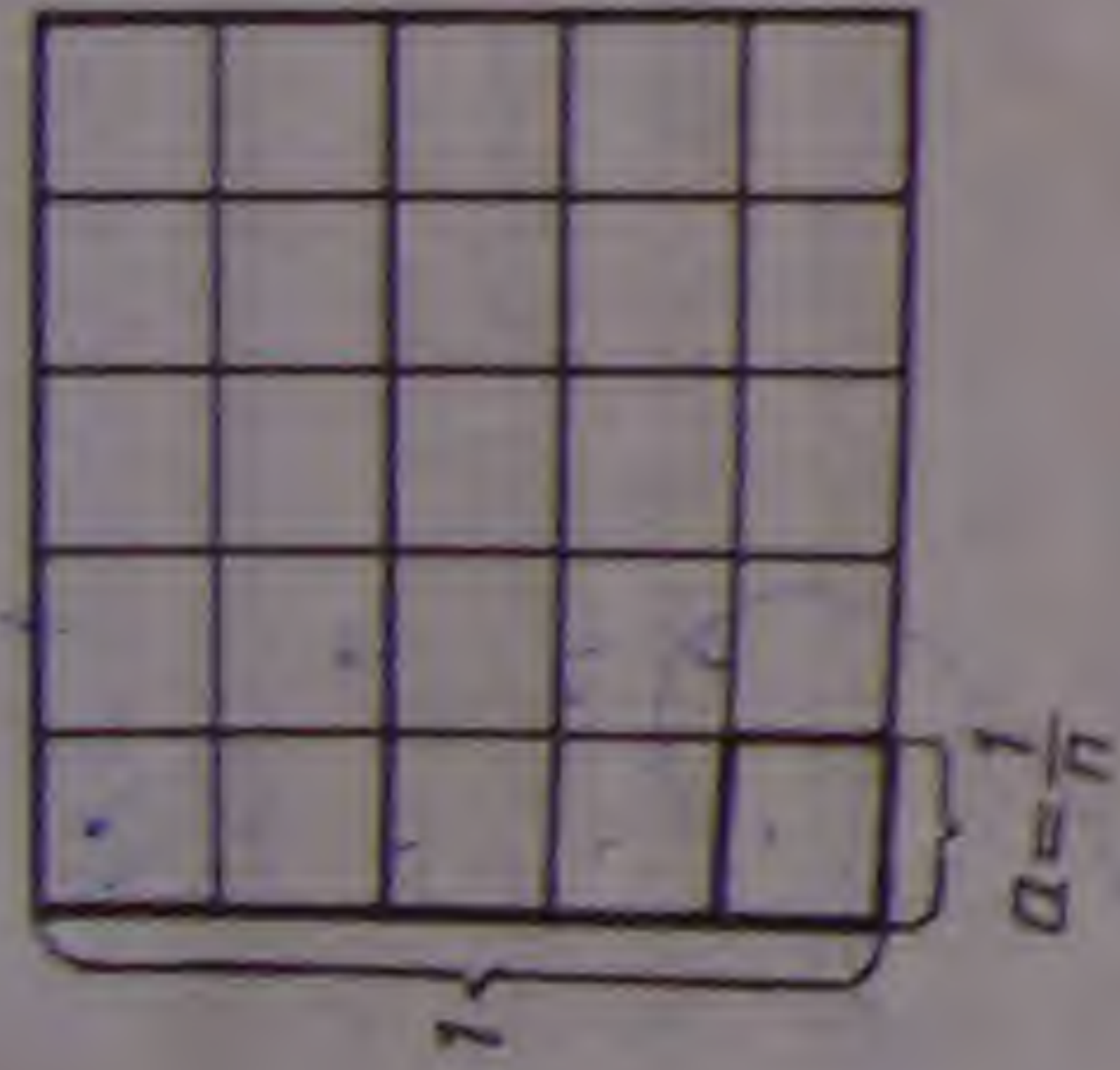
Այժմ ենթադրենք, որ  $a$  թիվը վերջավոր տասնորդական կոտորակ է և ստորակետից հետո պարունակում է  $n$  միշ ( $a$ -ն կարող է լինել, մասնավորապես, նաև ամբողջ թիվ, որի համար  $n=0$ ): Այդ դեպքում  $m=a \cdot 10^n$  թիվը ամբողջ թիվ է:  $a$  կողմով քառակուսին տրոհենք  $m^2$  հատ հավասար քառակուսիների այնպես, ինչպես ցույց է տրված 75,բ նկարում (այս նկարում  $m=7$ ): Այդ դեպքում տրված քառակուսու յուրաքանչյուր կողմը տրոհվում է  $m$  հավասար մասերի և, ուրեմն, փոքր քառակուսիներից յուրաքանչյուրի կողմը հավասար է  $\frac{a}{m} = \frac{a}{a \cdot 10^n} = \frac{1}{10^n}$ : Ըստ (1) բանաձևի՝ յուրաքանչյուր փոքր

$$S = (2,1 \text{ սմ})^2 = 4,41 \text{ սմ}^2$$

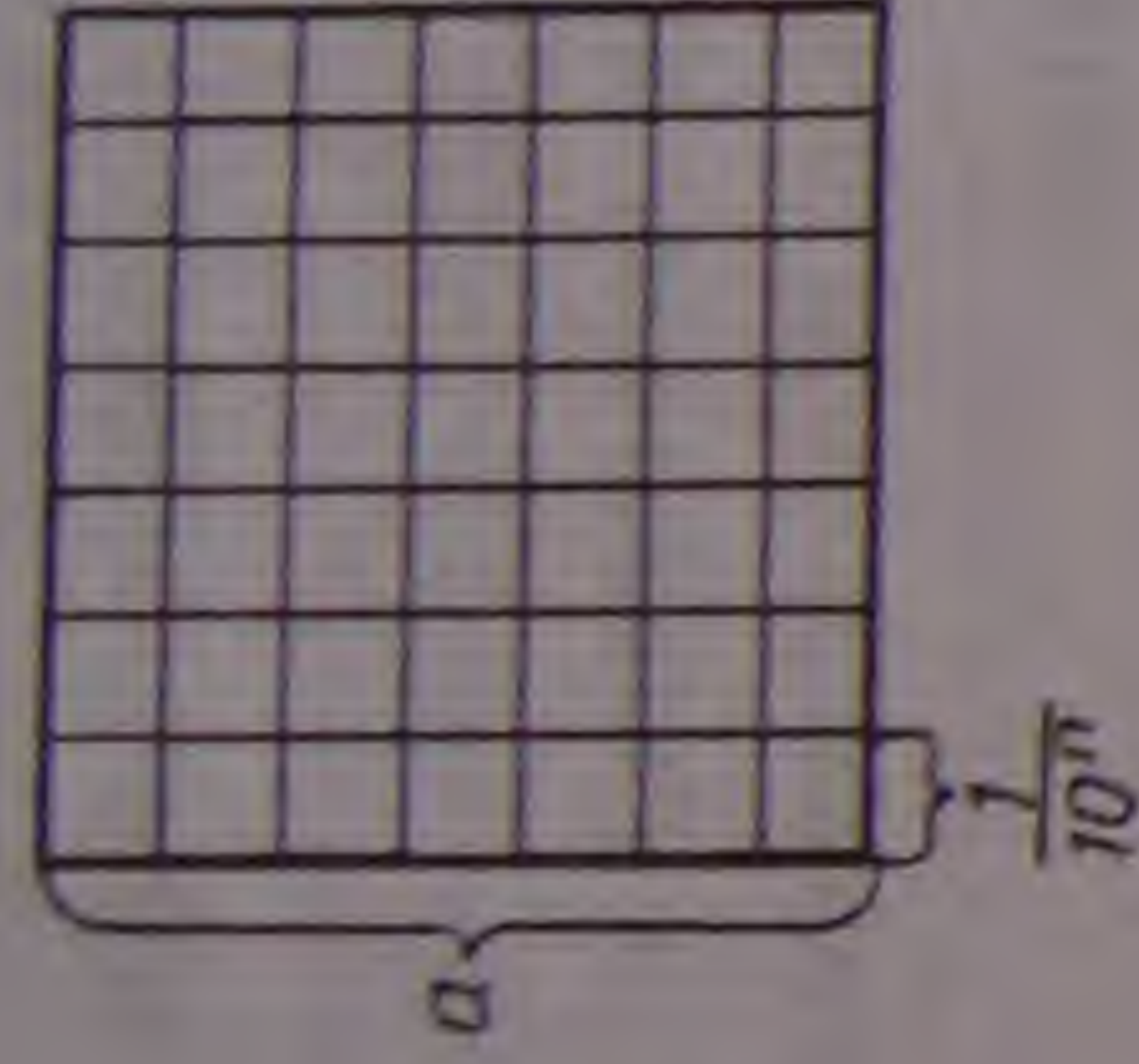


Նկ. 74



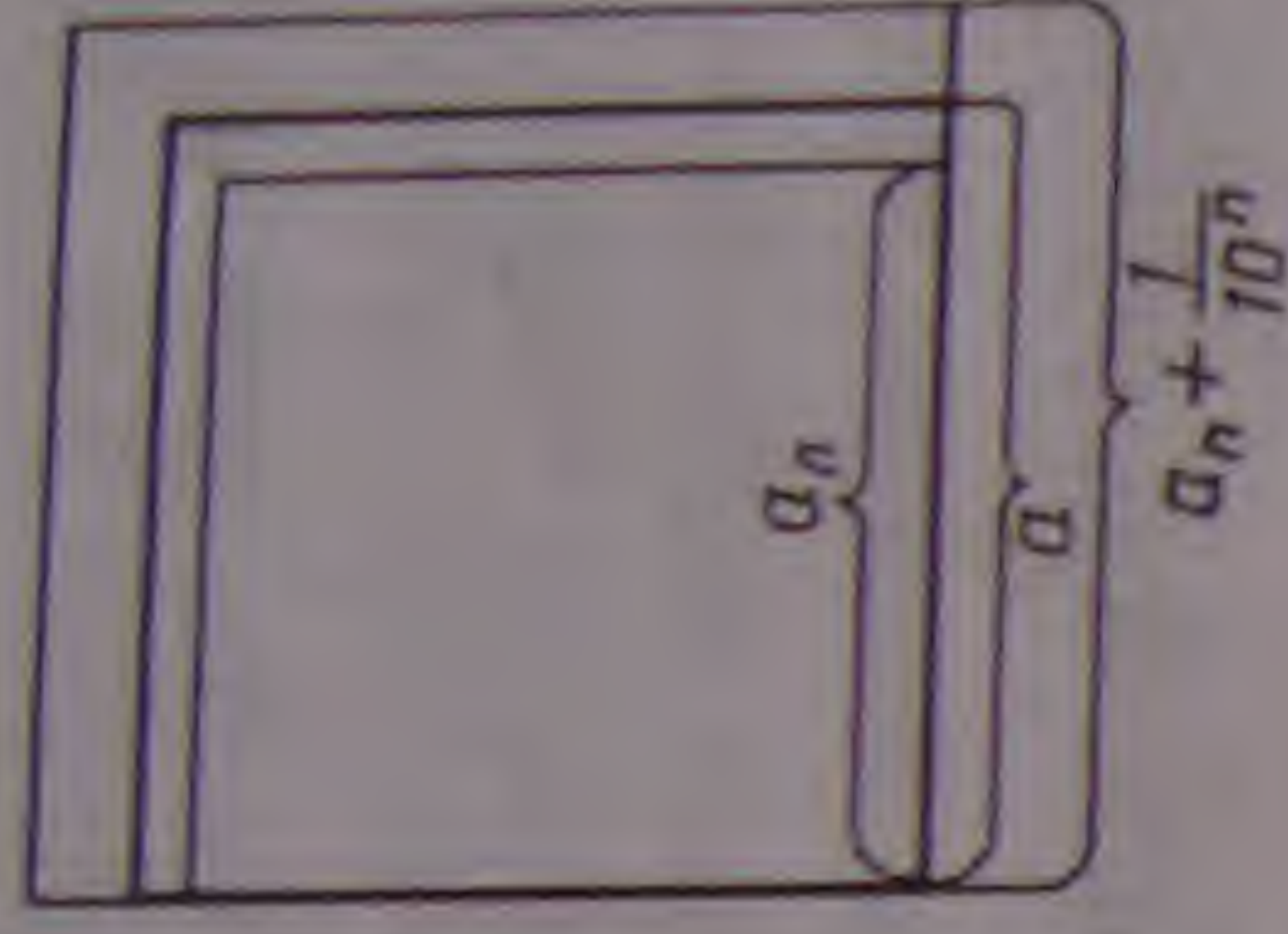


ա)



բ)

Նկ. 75



գ)

քառակուսու մակերեսը հավասար է  $\left(\frac{1}{10^n}\right)^2$ : Հետևաբար՝ տրված քառակուսու  $S$  մակերեսը հավասար է.

$$m^2 \cdot \left(\frac{1}{10^n}\right)^2 = \left(\frac{m}{10^n}\right)^2 = \left(\frac{a \cdot 10^n}{10^n}\right)^2 = a^2;$$

վերջապես, ենթադրենք, որ  $a$  թիվը անվերջ տասնորդական կտտորակ է: Դիտարկենք այնպիսի  $a_n$  թիվ, որն ստացվում է  $a$  թվից, եթե նրա ստորակետից հետո  $(n+1)$ -րդից սկսած բոլոր թվանշանները դեն ենք գցում: Քանի որ  $a$  թիվը  $a_n$ -ից տարբերվում է ոչ ավելի, քան  $\frac{1}{10^n}$ -ը, ապա  $a_n \leq a \leq a_n + \frac{1}{10^n}$ :

$$\text{Այստեղից՝ } a_n^2 \leq a^2 \leq \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2; \quad (2)$$

Պարզ է, որ տրված քառակուսու  $S$  մակերեսը եզրափակված է  $a_n$  կողմով քառակուսու և  $a_n + \frac{1}{10^n}$  կողմով քառակուսու մակերեսների

միջև (Նկ. 75,գ), այսինքն՝  $a_n^2$  և  $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$  մեծությունների միջև.

$$a_n^2 \leq S \leq \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2; \quad (3)$$

Այժմ պատկերացնենք, որ  $n$  թիվը անսահմանափակորեն մեծացնում ենք: Այդ ընթացքում  $\frac{1}{10^n}$  թիվը կդառնա որքան ուզեք



փոքր: Ուրեմն  $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$  թիվը  $a_n^2$  թվից կտարբերվի որքան ուզեք

փոքր չափով: Հետևաբար, (2) և (3) անհավասարություններից թխում է, որ  $S$  թիվը որքան ուզեք թիչ կտարբերվի  $a^2$  թվից: Դրանից հետևում է, որ նրանք հավասար են.  $S=a^2$ , ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

### 36 Ուղղանկյան մակերեսը:

Թեոռեմ: Ուղղանկյան մակերեսը հավասար է նրա կից կողմերի ադտադրյալին:

Ապացուցում: Դիտարկենք  $a$ ,  $b$  կողմերով և  $S$  մակերեսով ուղղանկյունը (նկ. 76,ա): Ապացուցենք, որ  $S=ab$ :

Ուղղանկյունը լրացնենք այնպես, մինչև ստացվի  $a+b$  կողմով քառակուսի, ինչպես ցույց է տրված 76,բ նկարում: Ըստ 3<sup>o</sup> հատկության՝ այդ քառակուսու մակերեսը հավասար է  $(a+b)^2$ : Մյուս կողմից՝ այդ քառակուսին կազմված է  $S$  մակերեսով տրված ուղղանկյունից, նրան հավասար և, ուրեմն, նույնպես  $S$  մակերեսով մեկ այլ ուղղանկյունից (ըստ մակերեսների 1<sup>o</sup> հատկության) և  $a^2$  ու  $b^2$  մակերեսներով երկու քառակուսուց (ըստ մակերեսների 3<sup>o</sup> հատկության): Ըստ մակերեսների 2<sup>o</sup> հատկության՝

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + S + S \text{ կամ}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2S:$$

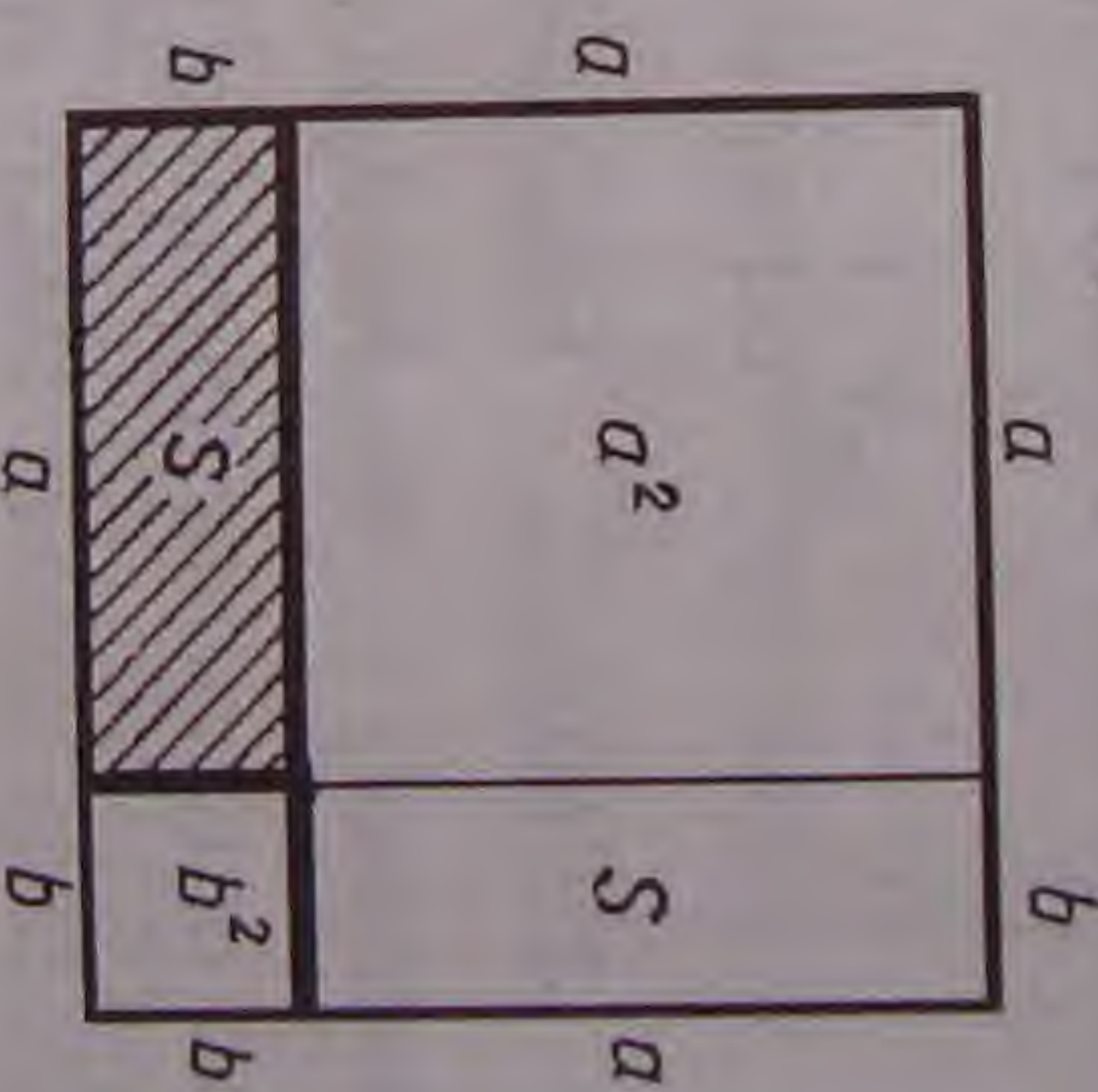
Այստեղից ստացվում է՝  $S=ab$ : Թերորենն ապացուցված է:



Հարցեր և խնդիրներ

267. Թղթից կտրենք երկու հավասար ուղղանկյուն եռանկյուններ և դրանցով կազմենք. ա) հավասարաբարուն եռանկյուն, բ) ուղղանկյուն, գ) ուղղանկյուն չիանդիսացող գուգահեռագիծ: Համեմատենք ստացված պատկերների մակերեսները:

268. Գծագրենք քառակուսի և այն ընդունենք որպես մակերեսների չափման միավոր: Այնուհետև գծագրենք. ա) քառակուսի, որի մակերեսն արտահայտող թիվը 4 է, բ) քառակուսի չիանդիսացող



Բ) Նկ. 76



ուղղանկյուն, որի մակերեսն արտահայտող թիվը 4 է, **գ)** եռանկյուն, որի մակերեսն արտահայտող թիվը 2 է:

**269.** Գծագրեք  $ABCD$  զուգահեռագիծ և նշեք այնպիսի  $M$  կետ, որը համաչափ է  $D$  կետին  $C$  կետի նկատմամբ: Ապացուցեք, որ  $S_{ABCD} = S_{AMD}$ :

**270.**  $ABCD$  ուղղանկյան  $AD$  կողմի վրա կառուցված է  $ADE$  եռանկյուն այնպես, որ նրա  $AE$  և  $DE$  կողմերը  $BC$  հատվածը հատում են  $M$  և  $N$  կետերում, ընդ որում  $M$  կետը  $AE$  հատվածի միջնակետն է: Ապացուցեք, որ  $S_{ABCD} = S_{ADE}$ :

**271.** Գտեք քառակուսու մակերեսը, եթե նրա կողմը հավասար է.  
**ա)** 1,2սմ, **բ)**  $\frac{3}{4}$ դմ, **գ)**  $3\frac{1}{3}$ մ:

**272.** Որոշեք այն քառակուսու կողմը, որի մակերեսը հավասար է.  
**ա)**  $16\text{սմ}^2$ , **բ)**  $25\text{դմ}^2$ , **գ)**  $2,25\text{մ}^2$ :

**273.** Քառակուսու մակերեսը  $24\text{սմ}^2$  է: Այդ քառակուսու մակերեսն արտահայտեք. **ա)** քառակուսի միլիմետրով, **բ)** քառակուսի դեցիմետրով:

**274.** Ինչպե՞ս կփոփոխվի քառակուսու մակերեսը, եթե նրա կողմերը **ա)** մեծացվեն 3 անգամ, **բ)** փոքրացվեն 2 անգամ:

**275.** Քանի՞ անգամ պետք է մեծացնել քառակուսու կողմը, որպեսզի նրա մակերեսը մեծանա 36 անգամ:

**276.** Դիցուք՝ ուղղանկյան կից կողմերն են  $a$ -ն և  $b$ -ն, իսկ մակերեսը  $S$ -ը: Գտեք. **ա)**  $S$ -ը, եթե  $a=8,5\text{սմ}$ ,  $b=3,2\text{սմ}$ , **բ)**  $S$ -ը, եթե  $a=\frac{2}{3}\text{սմ}$ ,  $b=1,2\text{սմ}$ ,

**գ)**  $b$ -ն, եթե  $a=32\text{սմ}$ ,  $S=684\text{սմ}^2$ , **դ)**  $a$ -ն, եթե  $b=4,5\text{դմ}$ ,  $S=1215\text{սմ}^2$ :

**277.** Ինչպե՞ս կփոփոխվի ուղղանկյան մակերեսը, եթե. **ա)** հանդիպակաց կողմերի զույգերից մեկը մեծացնեն 2 անգամ, **բ)** կողմերից յուրաքանչյուրը մեծացնեն 2 անգամ, **գ)** հանդիպակաց կողմերի զույգերից մեկը մեծացնեն 2 անգամ, իսկ մյուսը փոքրացնեն 2 անգամ:

**278.** Ուղղանկյան կից կողմերը հարաբերում են, ինչպես 4:3, իսկ նրա պարագիծը 28սմ է: Գտեք այդ ուղղանկյան մակերեսը:

**279.** Ուղղանկյան կողմերից մեկը 12սմ է, իսկ մակերեսը՝ 96սմ<sup>2</sup>: Գտեք այդ ուղղանկյան պարագիծը:

**280.** Քառակուսու պարագիծը 32սմ է, իսկ ուղղանկյան կողմերից մեկը 45սմ: Գտեք այդ ուղղանկյան մյուս կողմը, եթե հայտնի է, որ նրա և քառակուսու մակերեսները հավասար են:

**281.** Տրված է  $ABCD$  քառակուսին:  $AD$  ծառագայթի վրա վերցված է  $M$  կետն այնպես, որ  $\angle AMB=30^\circ$ , և  $BM=20\text{սմ}$ : Գտեք այդ քառակուսու մակերեսը:



**282.**  $ABCD$  ուղղանկյան  $A$  անկյան կիսորդը  $BC$  կողմը հատում է  $K$  կետում: Հայտնի է, որ  $BK=5$ սմ,  $KC=7$ սմ: Գտեք այդ ուղղանկյան մակերեսը:

**283.**  $ABCD$  ուղղանկյան  $A$  և  $D$  անկյունների կիսորդները  $BC$  կողմի հետ հատվում են միևնույն  $M$  կետում: Գտեք այդ ուղղանկյան մակերեսը, եթե հայտնի է, որ նրա պարագիծը 42սմ է:

**284.** Անհրաժեշտ է սենյակի 5,5մ և 6մ կողմերով ուղղանկյունաձև հատակը ծածկել մանրաթատակով: Դրա համար քանի՞ մանրատափտակ կպահանջվի, եթե այդ տափտակներից յուրաքանչյուրն ունի 30սմ երկարությամբ և 5սմ լայնությամբ ուղղանկյան ձև:

**285.** 15սմ կողմով քառակուսաձև քանի՞ սալիկ կպահանջվի, որպեսզի երեսպատվի 3մ և 2,7մ կողմերով ուղղանկյունաձև պատը:

**286.** Հափասար ցանկապատներով հողակտորներից մեկն ունի քառակուսու, իսկ մյուսը այնպիսի ուղղանկյան ձև, որի յերկարությունը 20մ է, լայնությունը՝ 10մ: Ո՞ր հողակտորի մակերեսն է ավելի մեծ և ինչքանով:

## § 2

### ՋՈՒԳԱՅԵՌԱԳԾԻ, ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԵՎ ՍԵՂԱՆԻ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԸ

**37 Ջուգահեռագծի մակերեսը:** Պայմանավորվենք զուգահեռագծի կողմերից մեկն անվանել *հիմք*, իսկ դրա հանդիպակաց կողմի ցանկացած կետից այդ հիմքն ընդգրկող ուղղին տարված ուղղահայացը նրա բարձրություն:

Թ ն ո ղ ն մ: *Ջուգահեռագծի մակերեսը հափասար է նրա հիմքի և բարձրության արտադրյալին:*

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Դիտարկենք  $S$  մակերեսով  $ABCD$  զուգահեռագիծը: Որպես հիմք ընդունենք  $AD$  կողմը և տանենք բարձրություններ  $BH$ -ը և  $CK$ -ն (նկ. 77): Պահանջվում է ապացուցել, որ  $S=AD \cdot BH$ :





Նախ ապացուցենք, որ  $HBCK$  ուղղանկյան մակերեսը նույախ հավասար է  $S$ -ի:  $ABCK$  սեղանը կազմված է  $ABCD$  զուգահեռագծից և  $DCK$  եռանկյունից: Մյուս կողմից՝ այն կազմված է  $HBCK$  ուղղանկյունից և  $ABH$  եռանկյունից: Բայց  $DCK$  և  $ABH$  ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են՝ ըստ ներքնաձիգի և սուր անկյան (նրանց  $AB$  և  $CD$  ներքնաձիգները, որպես զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմեր, հավասար են, իսկ անկյուններ 1-ը և 2-ը հավասար են՝ որպես համապատասխան անկյուններ, որոնք առաջանում են  $AB$  և  $CD$  զուգահեռ ուղիղները  $AD$ -ով հատելիս): Ուրեմն՝ այդ եռանկյունների մակերեսները հավասար են: Հետևաբար՝  $ABCD$  զուգահեռագծի և  $HBCK$  ուղղանկյան մակերեսները նույնպես հավասար են: Այսինքն՝  $HBCK$  ուղղանկյան մակերեսը  $S$  է: Ըստ ուղղանկյան մակերեսի մասին թեորեմի՝  $S = BC \cdot BH$ : Բայց քանի որ  $BC = AD$ , ապա  $S = AD \cdot BH$ : Թեորեմն ապացուցված է:

**(38) Եռանկյան մակերեսը:** Եռանկյան կողմերից մեկը հաճախ անվանում են նրա *հիմք*: Եթե հիմքն ընտրված է, ապա ասելով «բարձրություն»՝ հասկանում են եռանկյան այն բարձրությունը, որ տարված է այդ հիմքին:

Թ ե ո ր ե մ : Եռանկյան մակերեսը հավասար է *հիմքի և բարձրության արտադրյալի կեսին*:

Ա պ ա ց ու ց ու մ : Դիցուք՝  $S$ -ը  $ABC$  եռանկյան մակերեսն է (նկ. 78): Որպես եռանկյան հիմք ընդունենք  $AB$  կողմը և տանենք  $CH$  բարձրությունը: Ապացուցենք, որ

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH:$$

$ABC$  եռանկյունը լրացնենք՝ կառուցելով  $ABCD$  զուգահեռագիծ, ինչպես ցույց է տրված նկար 78-ում:  $ABC$  և  $DCB$  եռանկյունները հավասար են՝ ըստ երեք կողմի ( $BC$ -ն նրանց ընդհանուր կողմ է,  $AB = CD$  և  $AC = BD$ , որպես  $ABDC$  զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմեր): Հետևաբար՝  $ABC$  եռանկյան  $S$  մակերեսը հավասար է  $ABDC$  զուգահեռագծի մակերեսի կեսին: Այսինքն՝  $S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$ : Թեորեմն ապացուցված է:



< Ե տ և ա ն ք 1 : Ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը հավասար է նրա էջերի արտադրյալի կեսին:

< Ե տ և ա ն ք 2 : Եթե երկու եռանկյան բարձրությունները հավասար են, ապա նրանց մակերեսները հարաբերում են, ինչպես հիմքերը:

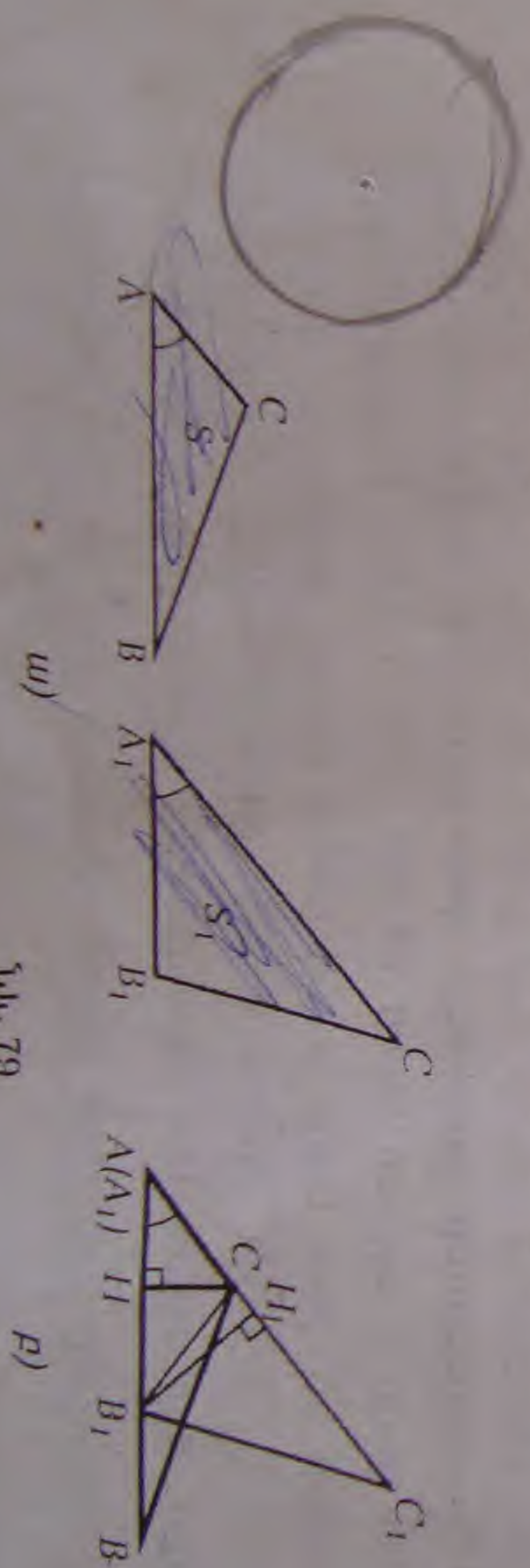
Օգտվելով հետևանք 2-ից՝ ապացուցենք թեորեմ՝ մեկական հավասար անկյուն ունեցող եռանկյունների մակերեսների հարաբերության մասին:

Թ Ե ռ Ի Ե Վ : Եթե եռանկյուններից մեկի անկյունը հավասար է մյուսի անկյանը, ապա այդ եռանկյունների մակերեսները հարաբերում են՝ ինչպես հավասար անկյուն կազմող կողմերի արտադրյալները:

Ապացուցում : Դիցուք՝  $S$ -ը և  $S_1$ -ը  $ABC$  և  $A_1B_1C_1$  եռանկյունների մակերեսներն են, և նրանց մեջ  $\angle A = \angle A_1$  (նկ. 79, ա): Ապացուցենք, որ

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1};$$

$A_1B_1C_1$  եռանկյունը վերադրենք  $ABC$  եռանկյան վրա այնպես, որ  $A_1$  և  $A$  գազաթնեղը հանընկնեն, իսկ  $A_1B_1$  և  $A_1C_1$  կողմերը վերադրվեն, համապատասխանաբար,  $AB$  և  $AC$  ծառագայթների վրա (նկ. 79, բ):  $ABC$  և  $A_1B_1C$  եռանկյուններն ունեն ընդհանուր բարձրություն՝  $CH$ -ը: Ուրեմն՝  $\frac{S}{S_{AB_1C}} = \frac{AB}{AB_1}$  (ըստ հետևանք 2-ի):  $AB_1C$  և  $A_1B_1C_1$  եռանկյունները նույնպես ունեն ընդհանուր բարձրություն՝  $B_1H_1$ -ը:



նկ. 79



Ուրեմն՝  $\frac{S_{AB_1C}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AC}{AC_1}$ : Բազմապատկելով այս երկու հավասարու-

թյունները՝ ստացվում է,  $\frac{S}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}$ , կամ՝  $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ :

Թերեմն ապացուցված է:

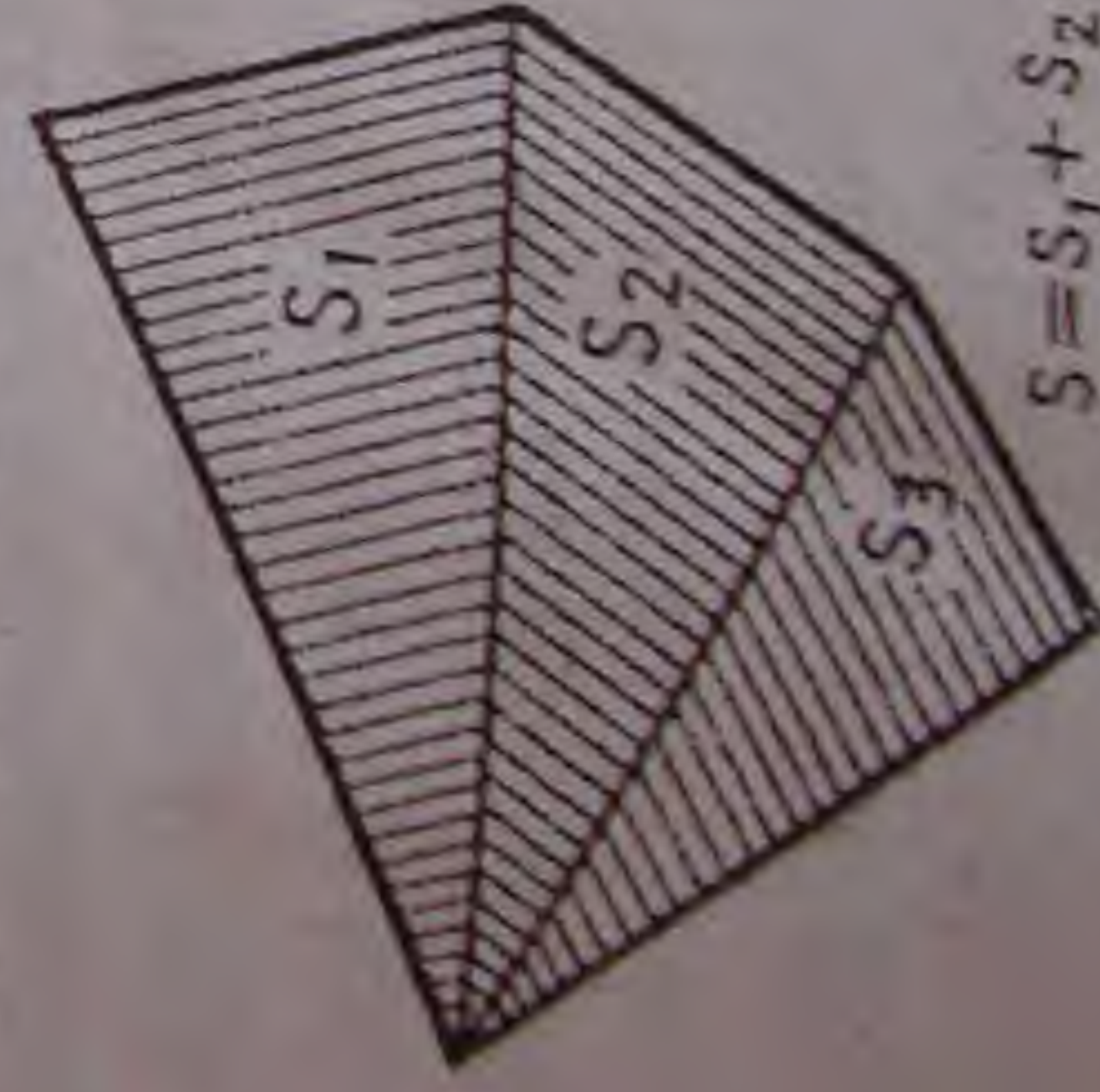
**(39) Սեղանի մակերեսը:** Կամայական բազմանկյան մակերեսը հաշվելու համար, սովորաբար, վարվում են այսպես. բազմանկյունը տրոհում են եռանկյունների և գտնում են եռանկյուններից յուրաքանչյուրի մակերեսը: Այդ եռանկյունների մակերեսների գումարը հավասար է տրված բազմանկյան մակերեսին (նկ. 80): Օգտվելով այդ հնարքից՝ արտաժենք սեղանի մակերեսը հաշվելու բանաձևը: Պայմանավորվենք՝ սեղանի *բարձրություն* անվանել այն ուղղահայացը, որը սեղանի հիմքերից մեկի կամայական կետից տարվում է մյուս հիմքն ընդգրկող ուղղին: Նկար 81-ում  $BH$  հատվածը (ինչպես նաև  $DH_1$  հատվածը)  $ABCD$  սեղանի բարձրություն է:

Թ ե ո թ ն մ : *Սեղանի մակերեսը հավասար է նրա հիմքերի կիսազումարի և բարձրության արտադրյալին:*

Ապացուցում: Դիտարկենք  $ABCD$  սեղանը, որի հիմքերն են  $AD$ -ն և  $BC$ -ն, բարձրությունը՝  $BH$ -ը, իսկ մակերեսը՝  $S$ -ը (նկ. 81):

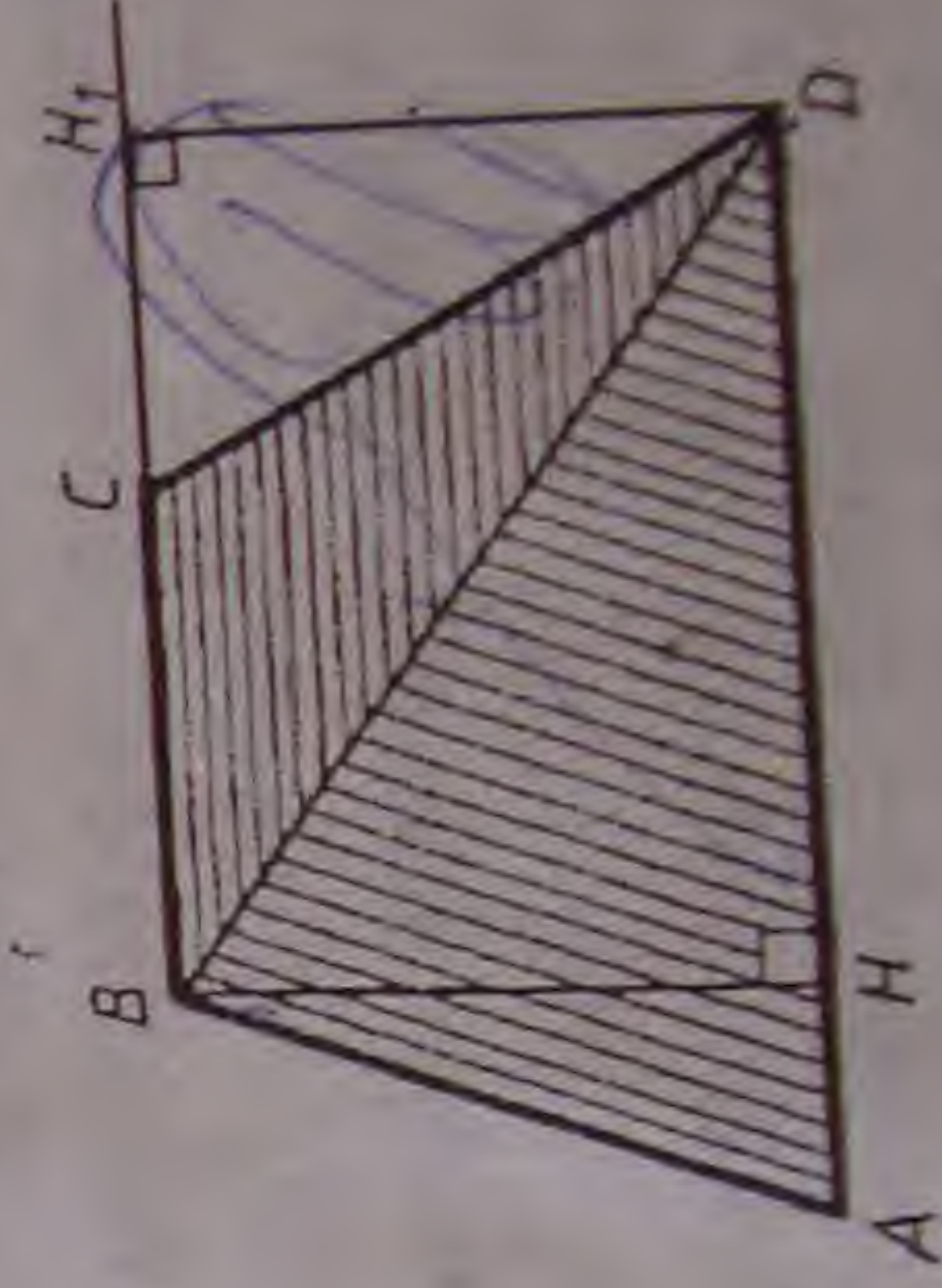
Ապացուցենք, որ  $\hat{S} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH$ :

$BD$  անկյունագիծը սեղանը տրոհում է երկու՝  $ABD$  և  $BDC$  եռանկյունների: Ուրեմն՝  $S = S_{ABD} + S_{BDC}$ :  $AD$  և  $BH$  հատվածներն ընդունենք որպես  $ABD$  եռանկյան հիմք և բարձրություն, իսկ  $BC$  և  $DH_1$  հատվածները՝ որպես  $BDC$  եռանկյան հիմք և բարձրություն: Այդ



$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

Նկ. 80



Նկ. 81



դեպքում  $S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BH$ ,  $S_{BDC} = \frac{1}{2} BC \cdot DH_1$ : Քանի որ

$DH_1 = BH$ , ապա  $S_{BDC} = \frac{1}{2} BC \cdot BH$ : Այսպիսով

$$S = \frac{1}{2} AD \cdot BH + \frac{1}{2} BC \cdot BH = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BH:$$

Թեորեմն ապացուցված է:



### Խնդիրներ

**287.** Դիցուք՝ զուգահեռագծի հիմքը  $a$ -ն է, բարձրությունը՝  $h$ -ը, իսկ մակերեսը՝  $S$ -ը: Գտեք. **ա)**  $S$ -ը, եթե  $a=15$ սմ,  $h=12$ սմ, **բ)**  $a$ -ն, եթե  $S=34$ սմ<sup>2</sup>,  $h=8,5$ սմ, **գ)**  $h$ -ը, եթե  $S=162$ սմ<sup>2</sup>,  $a=9$ սմ, **դ)**  $a$ -ն, եթե  $h=\frac{1}{2}a$ ,

$S=21a$ :

**288.** Զուգահեռագծի անկյունագիծը 13սմ է և ուղղահայաց է զուգահեռագծի այն կողմին, որը 12սմ է: Գտեք զուգահեռագծի մակերեսը:

**289.** Զուգահեռագծի կից կողմերը հավասար են 12սմ և 13սմ, իսկ սուր անկյունը 30° է: Գտեք զուգահեռագծի մակերեսը:

**290.** Շեղանկյան կողմը 6սմ է, իսկ անկյուններից մեկը՝ 150°: Գտեք շեղանկյան մակերեսը:

**291.** Զուգահեռագծի կողմը 8,1սմ է, իսկ 14սմ-ի հավասար անկյունագիծը նրա հետ կազմում է 30° անկյուն: Գտեք զուգահեռագծի մակերեսը:

**292.** Դիցուք՝  $a$ -ն և  $b$ -ն զուգահեռագծի կից կողմերն են, իսկ  $h_1$ -ը և  $h_2$ -ը բարձրությունները: Գտեք. **ա)**  $h_2$ -ը, եթե  $a=18$ սմ,  $b=30$ սմ,  $h_1=6$ սմ,  $h_2 > h_1$ , **բ)**  $h_1$ -ը, եթե  $a=10$ սմ,  $b=15$ սմ,  $h_2=6$ սմ,  $h_2 > h_1$ , **գ)**  $h_1$ -ը և  $h_2$ -ը, եթե մակերեսը՝  $S=54$ սմ<sup>2</sup>,  $a=4,5$ սմ,  $b=6$ սմ:

**293.** Զուգահեռագծի սուր անկյունը 30° է, իսկ բութ անկյան գագաթից տարված բարձրությունները հավասար են 2սմ և 3սմ: Գտեք զուգահեռագծի մակերեսը:

**294.** Գտեք զուգահեռագծի անկյունները, եթե նրա մակերեսը 40սմ<sup>2</sup> է, իսկ կողմերը՝ 10սմ և 8սմ:

**295.** Գտեք զուգահեռագծի անկյունները, եթե նրա մակերեսը 20սմ<sup>2</sup> է, իսկ բութ անկյան գագաթից կողմերից մեկին տարված բարձրությունը այդ կողմը տրոհում է 2սմ և 8սմ եղկարությամբ հատվածների՝ սկսած սուր անկյան գագաթից:



296.  $ABCD$  գուգահեռագծի  $B$  անկյունը բութ է:  $AD$  կողմի շարունակության վրա՝  $D$  կետից դեպի աջ նշված է  $E$  կետն այնպես, որ  $\angle ECD=60^\circ$ ,  $\angle CED=90^\circ$ ,  $AB=4$ սմ,  $AD=10$ սմ: Գտեք գուգահեռագծի մակերեսը:
297.  $MPKT$  գուգահեռագծի  $MT$  կողմի վրա նշված է  $E$  կետը,  $\angle PEM=90^\circ$ ,  $\angle EPT=45^\circ$ ,  $ME=4$ սմ,  $ET=7$ սմ: Գտեք գուգահեռագծի մակերեսը:
298. Որոշեք գուգահեռագծի պարագիծը, եթե նրա կից կողմերի տարբերությունը 10սմ է, իսկ բարձրությունները հարաբերում են, ինչպես 3:5:
299. Զուգահեռագծի անկյունագիծը հավասար է նրա կողմին: Գտեք գուգահեռագծի մակերեսը, եթե նրա մեծ կողմը 15,2սմ է, իսկ անկյուններից մեկը՝  $45^\circ$ :
300. Քառակուսին և շեղանկյունը, որը քառակուսի չէ, ունեն հավասար պարագծեր: Համեմատեք այդ պատկերների մակերեսները:
301. Համեմատեք ուղղանկյան և գուգահեռագծի մակերեսները, եթե նրանք ունեն հավասար հիմքեր և հավասար պարագծեր:
302. Դիցուք՝  $a$ -ն եռանկյան հիմքն է,  $h$ -ը՝ բարձրությունը, իսկ  $S$ -ը՝ մակերեսը: Գտեք. ա)  $S$ -ը, եթե  $a=7$ սմ,  $h=11$ սմ, բ)  $h$ -ը, եթե  $a=14$ սմ,  $S=37,8$ սմ<sup>2</sup>, գ)  $a$ -ն, եթե  $S=h^2$ ,  $h=2$ սմ:
303.  $ABC$  եռանկյան  $AB$  և  $BC$  կողմերը համապատասխանաբար 16սմ և 22սմ են: Գտեք  $BC$  կողմին տարված բարձրությունը, եթե  $AB$  կողմին տարված բարձրությունը 11սմ է:
304. Եռանկյան երկու կողմերն են 7,5սմ և 3,2սմ: Դրանցից մեծին տարված բարձրությունը 2,4սմ է: Գտեք տրված կողմերից փոքրին տարված բարձրությունը:
305. Գտեք ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը, եթե նրա էջերն են. ա) 4սմ և 11սմ, բ) 12սմ և 3դմ:
306. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերից մեկը 14սմ է, իսկ անկյուններից մեկը՝  $45^\circ$ : Գտեք եռանկյան մակերեսը:
307. Երկու եռանկյան բարձրությունները հավասար են, իսկ նրանցից մեկի հիմքը երկու անգամ փոքր է մյուսի հիմքից: Գտեք այդ եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:
308.  $ABC$  եռանկյան մեջ  $\angle C=135^\circ$ ,  $AC=6$ դմ, իսկ  $BD$  բարձրությունը 2դմ է: Գտեք  $ABD$  եռանկյան մակերեսը:
309. Գտեք 10սմ ներքնածիզով հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը:
310.  $ABCD$  ուղղանկյան  $BD$  անկյունագիծը 12սմ է:  $B$  գագաթի հեռավորությունը  $AC$  ուղղից հավասար է 4սմ: Գտեք  $ABC$  եռանկյան մակերեսը:
311. Համեմատեք այն երկու եռանկյունների մակերեսները, որոնց տրոհվում է տրված եռանկյունն իր միջնագծով:



312.  $ABC$  եռանկյան  $AB$  կողմի վրա վերցված  $M$  կետը հատվածով միացված է  $C$  գագաթին: Հայտնի է, որ  $AB=18$ սմ,  $AM=12$ սմ: Գտեք  $ABC$  և  $AMC$  եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:
313.  $ABC$  եռանկյան  $AB$  և  $AC$  կողմերի վրա վերցված են, համապատասխանաբար,  $M$  և  $N$  կետերն այնպես, որ  $AB=2AM$ ,  $AC=3AN$ : Գտեք  $ABC$  և  $AMN$  եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:
314. Գտեք  $ABC$  եռանկյուն:  $A$  գագաթով տարեք երեք այնպիսի ուղիղներ, որ դրանք եռանկյունը տրոհեն չորս միմյանց հակասար մակերեսով եռանկյունների:
315. Ապացուցեք, որ շեղանկյան մակերեսը հավասար է անկյունագծերի արտադրյալի կեսին: Հաշվեք շեղանկյան մակերեսը, եթե նրա անկյունագծերը հավասար են. **ա)** 3,2դմ և 14սմ, **բ)** 4,6դմ և 2դմ:
316. Շեղանկյան անկյունագծերից մեկը  $m$  մ է, իսկ մակերեսը՝  $27m$  մ<sup>2</sup>: Գտեք շեղանկյան մյուս անկյունագիծը:
317. Ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց են: Ապացուցեք, որ այդ քառանկյան մակերեսը հավասար է անկյունագծերի արտադրյալի կեսին:
318. Գտեք  $AD$  և  $BC$  հիմքերով  $ABCD$  սեղանի մակերեսը, եթե **ա)**  $AD=21$ սմ,  $BC=17$ սմ,  $BH$  բարձրությունը 7սմ է, **բ)**  $\angle D=30^\circ$ ,  $AD=10$ սմ,  $BC=2$ սմ, **գ)**  $CD \perp AD$ ,  $AD=5$ սմ,  $CD=8$ սմ,  $BC=13$ սմ:
319.  $ABCD$  սեղանի  $AD$  և  $BC$  հիմքերը, համապատասխանաբար, 10սմ և 8սմ են:  $ACD$  եռանկյան մակերեսը 30սմ<sup>2</sup> է: Գտեք սեղանի մակերեսը:
320. Ուղղանկյուն սեղանի մակերեսը 30սմ<sup>2</sup> է, պարագիծը՝ 28սմ, իսկ փոքր սրունքը՝ 3սմ: Գտեք սեղանի մեծ սրունքը:
321. Հավասարապրուն սեղանի պարագիծը 32սմ է, սրունքը՝ 5սմ, իսկ մակերեսը՝ 44սմ<sup>2</sup>: Գտեք սեղանի բարձրությունը:
322. Գտեք այն ուղղանկյուն սեղանի մակերեսը, որի փոքր կողմերը ճան են, իսկ մեծ անկյունը՝  $135^\circ$ :
323. Հավասարապրուն սեղանի բութ անկյունը  $135^\circ$  է, իսկ այդ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը մեծ հիմքը տրոհում է 1,4սմ և 3,4 սմ հատվածների: Գտեք սեղանի մակերեսը:
324. Սեղանի հիմքերը հարաբերում են, ինչպես 5:3: Փոքր հիմքի միջնակետը մեծ հիմքի ծայրակետերին միացնելուց ստացված եռանկյան մակերեսը 15սմ<sup>2</sup> է: Հաշվեք սեղանի մակերեսը:



# ԽՈՐԱՆԱՐՈՂԻ ԵՎ ՈՒՂԱՆԿՅՈՒՆԱՆԻՍՏԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԸ

**(40) Խորանարդի մակերևույթի մակերեսը:** Հիշենք, որ խորանարդն այն ուղղանկյունանիստն է, որի բոլոր կողերը հավասար են: Խորանարդի մակերևույթը կազմված է վեց միաստից, որոնցից յուրաքանչյուրը քառակուսի է (նկ. 82): Եթե խորանարդի կողն ունի  $a$  երկարություն, ապա յուրաքանչյուր միաստի մակերեսը հավասար է  $a^2$ : Ուրեմն՝ խորանարդի բոլոր միաստերի մակերեսների գումարը հավասար է  $6a^2$ , որն էլ կլինի խորանարդի մակերևույթի մակերեսը:

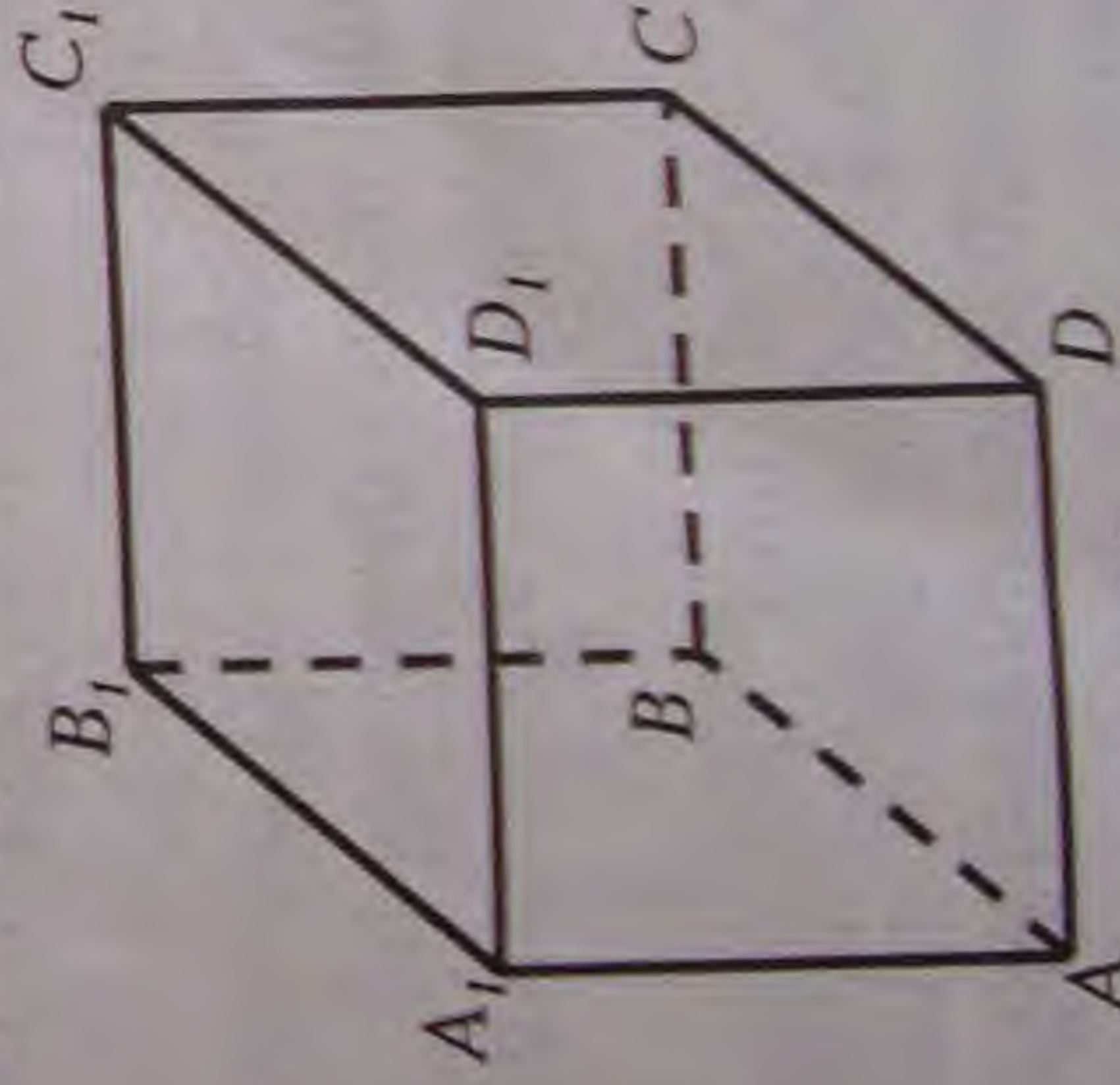
Այսպիսով՝ խորանարդի մակերևույթի մակերեսը հաշվվում է  $S=6a^2$  բանաձևով:

**(41) Ուղղանկյունանիստի մակերևույթի մակերեսը:** Հիշենք, որ ուղղանկյունանիստն ունի վեց միաստ, որոնցից յուրաքանչյուրը ուղղանկյուն է:

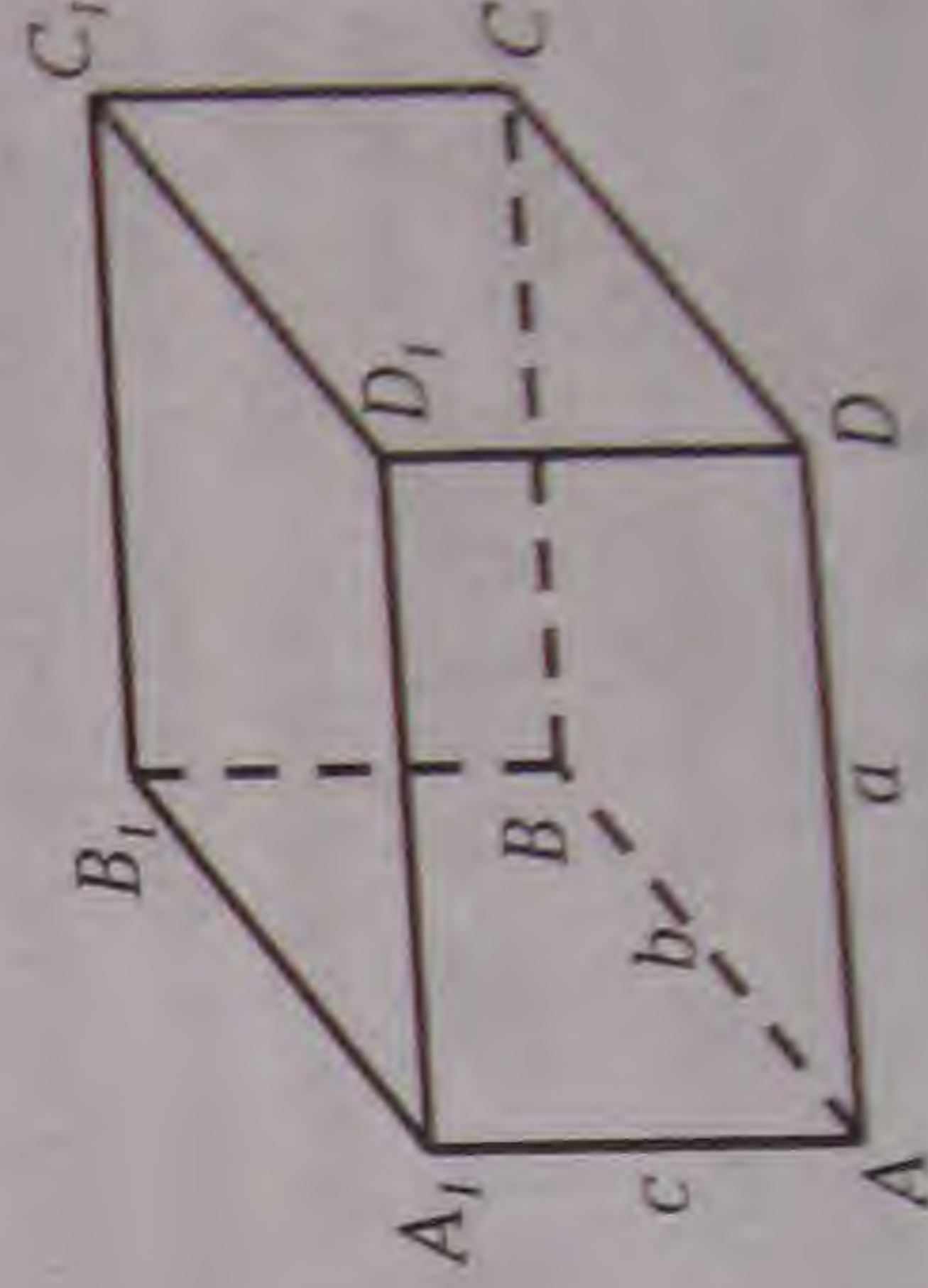
Այդ միաստերից յուրաքանչյուր գույգ հավասար են. դրանք հանդիպակաց միաստերն են, որոնք չունեն ընդհանուր գագաթ: Հանդիպակաց միաստերից երկուսը, օրինակ՝  $ABCD$  և  $A_1B_1C_1D_1$  ուղղանկյունները, դիտվում են որպես հիմքեր, իսկ մյուս չորս միաստերը՝ որպես կողմնային միաստեր (նկ. 83):

Ուղղանկյունանիստի կողմնային միաստերի մակերեսների գումարը անվանում են *կողմնային մակերևույթի մակերես*: Ուղղանկյունանիստի *լրիվ մակերևույթի մակերեսը նրա բոլոր նիստերի մակերեսների գումարն է*:

Այսպիսով՝ ուղղանկյունանիստի լրիվ մակերևույթի  $S_{\text{լրիվ}}$  մակերեսը արտահայտվում է  $S_{\text{լրիվ}}=S_{\text{կողմ}}+2S_{\text{հիմք}}$  (1) բանաձևով, որտեղ  $S_{\text{կողմ}}$ -ը կողմնային մակերևույթի մակերեսն է, իսկ  $S_{\text{հիմք}}$ -ը՝ հիմքի մակերեսը:



Նկ. 82



Նկ. 83



դիցուք՝ ուղղանկյունանիստի միևնույն, օրինակ,  $A$  գագաթը պարունակող կողերի երկարություններն են՝  $AD=a$ ,  $AB=b$ ,  $AA_1=c$ : Այդ դեպքում, օգտվելով ուղղանկյան մակերեսի հաշվման բանաձևից, ստանում ենք.  $S_{ABCD}=ab$ ,  $S_{AA_1P_1P}=ac$ ,  $S_{AA_1B_1B}=bc$ : Հաշվի առնելով, որ հանդիպակաց միստերը հավասար են, ստանում ենք ուղղանկյունանիստի լրիվ մակերևույթի մակերեսի բանաձևը.

$$S_{\text{լրիվ}}=2ac+2bc+2ab \quad (2)$$

Եթե  $ABCD$  ուղղանկյունն ընդունում ենք որպես ուղղանկյունանիստի հիմք, ապա հեշտ է տեսնել, որ  $S_{\text{հիմք}}=ab$ : Այդ դեպքում կողմնային մակերևույթի մակերեսը, այսինքն՝ հիմք չհանդիսացող միստերի մակերեսների գումարը, հաշվվում է

$$S_{\text{կողմ}}=2ac+2bc \quad (3)$$

բանաձևով:

(3) բանաձևը գրենք  $S_{\text{կողմ}}=(2a+2b)c$  տեսքով: Նկատենք, որ  $2a+2b$  արտահայտությունը ներկայացնում է ուղղանկյունանիստի հիմքի, այն է՝  $ABCD$  ուղղանկյան պարագծի, իսկ  $c$ -ն կողմնային կողն է:

Այսպիսով՝ ուղղանկյունանիստի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է ուղղանկյունանիստի հիմքի պարագծի և կողմնային կողի արտադրյալին:



### Հարցեր և խնդիրներ

325. Գտեք խորանարդի մակերևույթի մակերեսը, եթե նրա կողմ հավասար է. **ա)** 2,1սմ, **բ)** 3,5սմ:

326. Գտեք այն խորանարդի միստի մակերեսը, որի մակերևույթի մակերեսը հավասար է. **ա)** 24սմ<sup>2</sup>, **բ)** 150դմ<sup>2</sup>:

Կարո՞ղ եք գտնել այդ խորանարդի կողը:

327. Քանի՞ անգամ կմեծանա խորանարդի մակերևույթի մակերեսը, եթե **ա)** նրա յուրաքանչյուր կողը մեծացնեն 4 անգամ, **բ)** նրա յուրաքանչյուր միստի մակերեսը մեծացնեն 4 անգամ:

328. Սկզբում խորանարդի յուրաքանչյուր կողը մեծացրին 3 անգամ, իսկ հետո՝ յուրաքանչյուր միստի մակերեսը փոքրացրին 6 անգամ: Մեծացա՞վ, թե՞ փոքրացավ խորանարդի մակերևույթի մակերեսը:

329. Ուղղանկյունանիստի հիմքը  $a=6$ սմ և  $b=7$ սմ կից կողմերով ուղղանկյուն է, իսկ կողմնային կողը՝  $c=8$ սմ: Գտեք այդ ուղղանկյունանիստի **ա)** հիմքի մակերեսը, **բ)** կողմնային մակերևույթի մակերեսը, **գ)** լրիվ մակերևույթի մակերեսը:



330. Ուղղանկյունանիստի հիմքը 24սմ պարագծով քառակուսի է, իսկ կողմնային կողը հավասար է 5,5սմ: Գտեք այդ ուղղանկյունանիստի **ա**)կողմնային մակերևույթի մակերեսը, **բ**)լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

331. Ուղղանկյունանիստի հիմքը 8սմ կողմով քառակուսի է, իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է 112սմ<sup>2</sup>: Գտեք ուղղանկյունանիստի կողմնային կողը և լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

332. Ուղղանկյունանիստի հիմքը 3սմ և 5սմ կից կողմերով ուղղանկյուն է: Գտեք ուղղանկյունանիստի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, եթե հայտնի է, որ նրա փոքր կողմնային նիստը քառակուսի է:

333. Ուղղանկյունանիստի հիմքի կողմերից մեկը 12սմ է, իսկ պարագիծը՝ 40սմ: Գտեք նրա կողմնային կողը, եթե հայտնի է, որ լրիվ մակերևույթի մակերեսը հավասար է 592սմ<sup>2</sup>:

334. Արկղն ունի 3,5դմ կողմով խորանարդի ձև: Որքա՞ն նրբատախտակ է անհրաժեշտ այդ արկղը պատրաստելու համար:

335. Ուղղանկյունանիստի ձև ունեցող սենյակի չափսերն են. երկարությունը՝ 6մ, լայնությունը՝ 4մ, բարձրությունը՝ 3մ: Գտեք սենյակի **ա**)հատակի մակերեսը, **բ**)պատերի մակերեսը:

336. 3մ բարձրություն ունեցող սենյակի ուղղանկյունաձև հատակն ունի 5մ և 4,5մ չափսեր: Առնվազն քանի՞ փաթեթ պաստառ է հարկավոր այդ սենյակի պատերը լրիվ պաստառապատելու համար, եթե յուրաքանչյուր փաթեթ ունի 9,5մ<sup>2</sup> մակերես (դուռը և պատուհանը անտեսել):

337. 20մ երկարությամբ, 10մ լայնությամբ և 2մ բարձրությամբ ուղղանկյունանիստի ձև ունեցող ջրավազանի հատակը և պատերը անհրաժեշտ են սալապատել: Սալիկներից յուրաքանչյուրն ունի 2դմ կողմով քառակուսու ձև: Քանի՞ այդպիսի սալիկ է հարկավոր:

338. Ի՞նչ չափսեր պետք է ունենա ուղղանկյունաձև ստվարաթուղթը, որպեսզի նրանից կարողանաք, առանց թափոնի, պատրաստել 7սմ կողմով խորանարդ, որի յուրաքանչյուր նիստը լինի առանց կցոնի:

## § 4

### ՊՅՈՒԹԱԳՈՐԱՍԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

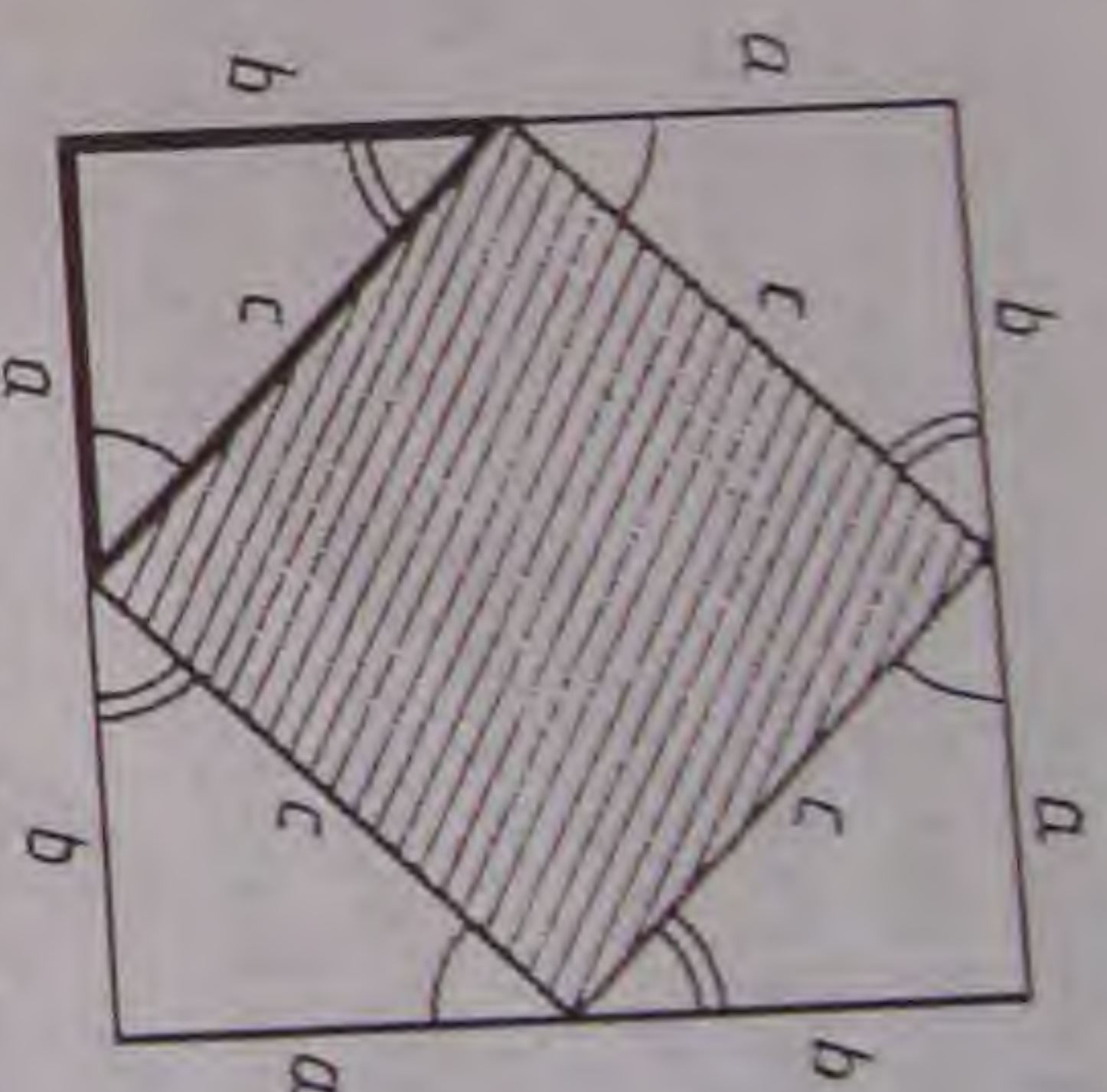
42) **Պյութագորասի թեորեմը:** Դեռ հին ժամանակներից բացահայտվել է մի նշանավոր առնչություն՝ ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի և եջերի միջև: Թեորեմը, որ հաստատում է այդ առնչությունը,





ա)

Նկ. 84



$$(a+b)^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$$

բ)

կոչվում է Պյութագորասի թեորեմ: Դա երկրաչափության կարևոր թեորեմներից մեկն է, և մենք այն կապացուցենք՝ օգտվելով բազմանկյունների մակերեսների հատկություններից:

Թեորեմ: Ուղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի քառակուսին հավասար է էջերի քառակուսիների գումարին:

Ապացուցում: Դիտարկենք  $a$ ,  $b$  էջերով և  $c$  ներքնաձիգով ուղանկյուն եռանկյունը (Նկ. 84, ա): Ապացուցենք, որ  $c^2 = a^2 + b^2$ :

Եռանկյունը լրացնենք այնպես, մինչև կառուցվի  $a+b$  կողմով քառակուսի՝ ինչպես ցույց է տրված 84, բ նկարում: Այդ քառակուսու  $S$  մակերեսը հավասար է  $(a+b)^2$ : Այսու կողմից՝ այդ քառակուսին կազմված է  $c$  կողմով մի քառակուսուց և չորս հավասար եռանկյուններից, որոնցից յուրաքանչյուրի մակերեսը  $\frac{1}{2}ab$  է: Ուրեմն՝

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2: \text{ Այսպիսով՝ } (a+b)^2 = 2ab + c^2, \text{ որտեղից՝ } c^2 = a^2 + b^2:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Ուշագրավ է Պյութագորասի թեորեմի պատմությունը: Այդ թեորեմը թեև կապվում է Պյութագորասի անվան հետ, սակայն այն հայտնի է եղել մաիքթան Պյութագորասը: Բաբելոնյան բնագրերում Պյութագորասից դեռևս 1200 տարի առաջ հիշատակվել է այդ թեորեմը:

Հնարավոր է, որ դրա ապացուցումը այն ժամանակներում չեն իմացել, իսկ ներքնաձիգի և էջերի միջև առնչությունը բացահայտվել է գուտ փորձնական եղանակով՝ չափումների հիման վրա: Այդ փաստերին վերաբերող ճշգրիտ տեղեկություններ չեն պահպանվել: Որոշ



պատմաբաններ կարծում են, որ այդ նշանավոր թեորեմն ապացուցել են Պյութագորասի հետևորդները և այն անվանել իրենց մեծ ուսուցչի պատվին: Թերևս հնարավոր է, որ այդ թեորեմի ապացուցումը գտել է հենց ինքը՝ Պյութագորասը: Այդ մասին պահպանվել է մի հին ավանդություն, ըստ որի Պյութագորասն իր հայտնագործության պատվին աստվածներին զոհ է մատուցել մի մեծ ցուլ, իսկ ըստ այլ վկայությունների՝ նույնիսկ հարյուր ցուլ: Հետագա դարերի ընթացքում գտել են Պյութագորասի թեորեմի տարբեր ապացուցումներ: Ներկայումս դրանց բանական հարդեն ծանոթ ենք այդ ապացուցումներից մեկին, հաջորդ դասարանում կծանոթանանք մեկ այլ ապացուցման ևս: Անցյալի մեծ մտածողներից ու գրողներից շատերն անդրադարձել են այդ նշանավոր թեորեմին և դրան են նվիրել իրենց տողերը:



Պյութագորաս (մ.թ.ա. VI դարի հին հույն գիտնական)

#### 43 Պյութագորասի թեորեմի հակադարձ թեորեմը:

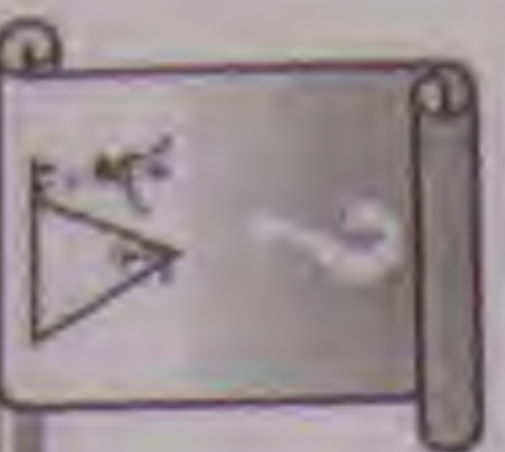
Թեորեմ: Եթե եռանկյան մի կողմի քառակուսին հավասար է մյուս երկու կողմերի քառակուսիների գումարին, ապա այդ եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է:

Ապացուցում: Դիցուք՝  $ABC$  եռանկյան մեջ  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ : Ապացուցենք, որ  $C$  անկյունն ուղիղ է: Դիտարկենք  $C_1$  ուղիղ անկյունով այն  $A_1B_1C_1$  ուղղանկյուն եռանկյունը, որի համար  $A_1C_1 = AC$  և  $B_1C_1 = BC$ : Ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝  $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$  և, ուրեմն,  $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$ :

Սակայն, ըստ թեորեմի պայմանի՝  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ : Հետևաբար  $A_1B_1^2 = AB^2$ , որից եզրակացնում ենք, որ  $A_1B_1 = AB$ : Այսպիսով  $ABC$  և  $A_1B_1C_1$  եռանկյունները, ըստ երեք կողմի, հավասար են: Ուրեմն  $\angle C = \angle C_1$ , այսինքն՝  $ABC$  եռանկյան  $C$  անկյունն ուղիղ է: Թեորեմն ապացուցված է:



Ըստ Պյութագորասի թեորեմի հակադարձ թեորեմի՝ 3, 4 և 5 կողմերով եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է.  $5^2=3^2+4^2$ : Ուղղանկյուն եռանկյուն է նաև 5, 12, 13 կողմերով, 8, 15, 17 կողմերով և 7, 24, 25 կողմերով եռանկյուններից յուրաքանչյուրը (բացատրեք, թե ինչու): Ուղղանկյուն եռանկյունները, որոնց կողմերն արտահայտվում են ամբողջ թվերով, կոչվում են *պյութագորասյան եռանկյուններ*: Կարելի է ապացուցել, որ այդպիսի եռանկյունների  $a$ ,  $b$  էջերը և  $c$  մեղքնածիզը արտահայտվում են հետևյալ բանաձևերով.  $a=2m \cdot n$ ,  $b=m^2-n^2$ ,  $c=m^2+n^2$ , որտեղ  $m$ -ը և  $n$ -ը կանայական բնական թվեր են,  $m>n$ : 3, 4 և 5 կողմերով եռանկյունը հաճախ անվանում են նաև *եգիպտական եռանկյուն*. այն հայտնի է եղել դեռևս իհն եգիպտացիներին: Ուղիղ անկյուն կառուցելու համար եգիպտացիները վարվել են այսպես. պարանի վրա կատարել են նշումներ այնպես, որ դրանցով պարանի ծայտրիկի 12 հապասար մասերի: Այնուհետև, կապելով պարանի ծայրը, գետնի վրա ձողերի օգնությամբ այն ձգել են 3, 4 և 5 կողմերով եռանկյան տեսքով: Այդ դեպքում 3 և 4 երկարությամբ կողմերը կազմում են ուղիղ անկյուն:



#### Իմնդիրոներ

339. Գտեք ուղղանկյուն եռանկյան մեղքնածիզը՝ ըստ տրված  $a$  և  $b$  էջերի. **ա)**  $a=6$ ,  $b=8$ , **բ)**  $a=5$ ,  $b=12$ , **գ)**  $a=\frac{3}{7}$ ,  $b=\frac{4}{7}$ , **դ)**  $a=1$ ,  $b=\sqrt{3}$ :
340. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերն են  $a$ -ն և  $b$ -ն, իսկ մեղքնածիզը՝  $c$ -ն: Գտեք  $b$ -ն, եթե **ա)**  $a=12$ ,  $c=13$ , **բ)**  $a=9$ ,  $c=15$ , **գ)**  $a=2$ ,  $c=\sqrt{5}$ , **դ)**  $a=6$ ,  $c=2b$ :
341. Գտեք  $c$  մեղքնածիզով ուղղանկյուն եռանկյան  $60^\circ$ -ի անկյան հանդիպակաց էջը:
342.  $ABCD$  ուղղանկյան մեջ գտեք. **ա)**  $AD$ -ն, եթե  $AB=5$ ,  $AC=13$ , **բ)**  $BC$ -ն, եթե  $CD=1,5$ ,  $AC=2,5$ , **գ)**  $CD$ -ն, եթե  $BD=17$ ,  $BC=15$ :
343. Հավասարապարուն եռանկյան սրուները 17սն է, իսկ ինքնը՝ 16սն: Գտեք ինքնին տարված բարձրությունը:
344. Գտեք. **ա)** հավասարակողմ եռանկյան բարձրությունը, եթե նրա կողմը 6սն է, **բ)** հավասարակողմ եռանկյան կողմը, եթե նրա բարձրությունը 4սն է:
345. Բառակուսու անկյունագիծը 20սն է: Գտեք նրա կողմը:



346. Ապացուցեք, որ հավասարակողմ եռանկյան մակերեսը հաշվվում

$$\text{է } S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \text{ բանաձևով, որտեղ } a\text{-ն եռանկյան կողմն է: Գտեք}$$

հավասարակողմ եռանկյան մակերեսը, եթե նրա կողմը հավասար է. **ա)** 4սմ, **բ)** 1,2սմ, **գ)**  $2\sqrt{2}$  սմ:

347. Գտեք հավասարասրուն եռանկյան սրունքը և մակերեսը, եթե **ա)** հիմքը 12սմ է, իսկ հիմքին տարված բարձրությունը 8սմ, **բ)** հիմքը 18սմ է, իսկ նրա հանդիպակաց անկյունը  $120^\circ$ , **գ)** եթե այն ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի ներքնածիզին տարված բարձրությունը 7սմ է:

348. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերն են  $a$ -ն և  $b$ -ն: Գտեք ներքնածիզին տարված բարձրությունը, եթե **ա)**  $a=5$ ,  $b=12$ , **բ)**  $a=12$ ,  $b=16$ :

349. Գտեք 10սմ, 10սմ, 12սմ կողմերով եռանկյան բարձրությունները:

350. Գտեք շեղանկյան կողմը և մակերեսը, եթե նրա անկյունագծերը 10սմ և 24սմ են:

351. Շեղանկյան կողմը 10սմ է. իսկ անկյունագծերից մեկը՝ 12սմ: Գտնել այդ շեղանկյան մյուս անկյունագիծը և մակերեսը:

352. Գտեք  $AB$  և  $CD$  հիմքերով  $ABCD$  սեղանի մակերեսը. **ա)**  $AB=10$ սմ,  $BC=DA=13$ սմ,  $CD=20$ սմ, **բ)**  $\angle C = \angle D = 60^\circ$ ,  $AB=BC=8$ սմ,

$$\text{գ)} \angle C = \angle D = 45^\circ, AB=6\text{սմ}, BC=9\sqrt{2} \text{ սմ:}$$

353. Ուղղանկյուն սեղանի հիմքերն են 9սմ և 18սմ, իսկ մեծ սրունքը՝ 15սմ: Գտեք սեղանի մակերեսը:

354.  $ABC$  եռանկյան  $CD$  բարձրության  $D$  հիմքը գտնվում է  $AB$  կողմի վրա, ընդ որում՝  $AD=BC$ : Գտեք  $AC$ -ն, եթե  $AB=3$ , իսկ  $CD=\sqrt{3}$ :

355. Չուղահեռագծի անկյունագծերից մեկը նաև նրա բարձրությունն է: Գտեք այդ բարձրությունը, եթե զուգահեռագծի պարագիծը 50սմ է, իսկ կից կողմերի տարբերությունը՝ 1սմ:

356. Պարզեք, թե արդյոք ուղղանկյուն եռանկյուն է այն եռանկյունը, որի կողմերն արտահայտվում են հետևյալ թվերով. **ա)** 6, 8, 10, **բ)** 5, 6, 7, **գ)** 9, 12, 15, **դ)** 10, 24, 26, **ե)** 3, 4, 6, **զ)** 11, 9, 13, **է)** 15, 20, 25:

Պատասխանը հիմնավորեք:

357. Գտեք եռանկյան փոքր բարձրությունը, եթե նրա կողմերն են. **ա)** 24սմ, 25սմ, 7սմ, **բ)** 15սմ, 17սմ, 8սմ:

358. Եռանկյան երկու կողմերն են 30սմ և 25սմ, իսկ երրորդ կողմին տարված բարձրությունը՝ 24սմ: Գտեք երրորդ կողմը:

359. Որոշեք եռանկյան անկյունները, եթե նրա կողմերն են. **ա)** 1, 1,  $\sqrt{2}$ , **բ)** 1,  $\sqrt{3}$ , 2:



360. Հավասարասրուն սեղանի անկյունագիծը 25սմ է, իսկ բարձրությունը՝ 15սմ: գտեք սեղանի մակերեսը:

361. Տրված է այնպիսի  $ABC$  եռանկյուն, որ  $AB=\sqrt{2}$ ,  $BC=2$ , իսկ  $AC$  կողմի վրա նշված է  $M$  կետն այնպես, որ  $AM=1$ ,  $BM=1$ : գտեք  $\angle ABC$ -ն:

գլուխ VIII-ի կրկնության հարցեր



1. Նկարագրեք, թե ինչպես են չափում բազմանկյունների մակերեսները:
2. Ձևակերպեք բազմանկյունների մակերեսների հիմնական հատկությունները:
3. Ձևակերպեք և ապացուցեք ուղղանկյան մակերեսի մասին թեորեմը:
4. Ձևակերպեք և ապացուցեք զուգահեռագծի մակերեսի հաշվման մասին թեորեմը:
5. Ձևակերպեք և ապացուցեք եռանկյան մակերեսի հաշվման մասին թեորեմը: Ինչպե՞ս հաշվել տրված էջերով ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը:
6. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեմ՝ հավասար անկյուն ունեցող երկու եռանկյունների մակերեսների հարաբերության մասին:
7. Ձևակերպեք և ապացուցեք սեղանի մակերեսի հաշվման մասին թեորեմը:
8. Ինչպե՞ս հաշվել տրված կողմով խորանարդի մակերեսների մակերեսը:
9. Պարզաբանեք, թե ինչպես են հաշվում ուղղանկյունանիստի լրիվ և կողմնային մակերեսայինների մակերեսները:
10. Ձևակերպեք և ապացուցեք Պյութագորասի թեորեմը:
11. Ձևակերպեք և ապացուցեք Պյութագորասի թեորեմի հակադարձ թեորեմը:
12. Ո՞ր եռանկյուններն են կոչվում պյութագորյան. բերե՛ք այդպիսի եռանկյան օրինակներ:

## Լրացուցիչ խնդիրներ

362. Ապացուցեք, որ հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան էջի վրա կառուցված քառակուսու մակերեսը կրկնակի մեծ է, քան ներքնաձիգին տալոված բարձրության վրա կառուցված քառակուսու մակերեսը:

363. Հողամասի մակերեսը 27հա է: Այդ մակերեսն արտահայտե՛ք ա) քառակուսի մետրերով, բ) քառակուսի կիլոմետրերով:



- 364.** Չուղահեռագծի բարձրություններն են 5սմ և 4սմ, իսկ պարագիծը 42սմ: Գտեք զուգահեռագծի մակերեսը:
- 365.** Գտեք զուգահեռագծի պարագիծը, եթե նրա մակերեսը  $24\text{սմ}^2$  է, իսկ անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը կողմերից հավասար է 2սմ և 3սմ:
- 366.** Չուղահեռագծի փոքր կողմը 29սմ է: Անկյունագծերի հատման կետից մեծ կողմին տարված ուղղահայացը այդ կողմը տրոհում է 33սմ և 12սմ հատվածների: Գտեք զուգահեռագծի մակերեսը:
- 367.** Ապացուցեք, որ  $a$  և  $b$  կողմեր ունեցող բոլոր եռանկյուններից ամենամեծ մակերեսն ունի այն եռանկյունը, որի այդ կողմերը ուղղահայաց են:
- 368.** Քառակուսու գագաթով ինչպե՞ս տանել երկու ուղիղ, որ քառակուսին բաժանվի երեք՝ հավասար մակերես ունեցող պատկերների:
- 369\*.** Մի եռանկյան յուրաքանչյուր կողմը մեծ է մյուս եռանկյան ցանկացած կողմից: Արդյոք դրանից հետևում է, որ առաջին եռանկյան մակերեսը մեծ է երկրորդի մակերեսից:
- 370\*.** Ապացուցեք, որ հավասարասրուն եռանկյան հիմքի վրա գտնվող կետի՝ սրունքից ունեցած հեռավորությունների գումարը կախված չէ այդ կետի դիրքից:
- 371.** Ապացուցեք, որ հավասարակողմ եռանկյան ներսում գտնվող կետի՝ կողմերից ունեցած հեռավորությունների գումարը կախված չէ այդ կետի դիրքից:
- 372\*.**  $ABC$  եռանկյան  $BC$  կողմի վրա վերցրած  $D$  կետից տարված են մյուս երկու կողմերին զուգահեռ ուղիղներ, որոնք այդ  $AB$  և  $AC$  կողմերը հատում են, համապատասխանաբար,  $E$  և  $F$  կետերում: Ապացուցեք, որ  $CDE$  և  $BDF$  եռանկյուններն ունեն հավասար մակերես:
- 373.**  $AB$  և  $CD$  սրունքներով  $ABCD$  սեղանի անկյունագծերը հատվում են  $O$  կետում: **ա)** Համեմատեք  $ABD$  և  $ACD$  եռանկյունների մակերեսները: **բ)** Համեմատեք  $ABO$  և  $CDO$  եռանկյունների մակերեսները: **գ)** Ապացուցեք, որ  $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ :
- 374.** Շեղանկյան անկյունագծերը հավասար են  $18^\circ$  և  $24^\circ$ : Գտեք շեղանկյան պարագիծը և զուգահեռ կողմերի միջև հեռավորությունը:
- 375.** Շեղանկյան մակերեսը  $540\text{սմ}^2$  է, իսկ անկյունագծերից մեկը  $4,5$ դմ: Գտեք անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը շեղանկյան կողմերից:
- 376.** Գտեք հավասարասրուն եռանկյան մակերեսը, եթե **ա)** նրա սրունքը  $20$ սմ է, իսկ հիմքին առնթեր անկյունը՝  $30^\circ$ , **բ)** սրունքին տարված բարձրությունը  $6$ սմ է և հիմքի հետ կազմում է  $45^\circ$  անկյուն:



377.  $ABC$  եռանկյան  $BC$  կողմը 34սմ է: Այդ կողմի միջնակետից  $AC$  ուղղին տարված  $MN$  ուղղահայացը  $AC$  կողմը տրոհում է երկու  $AN=25$ սմ և  $NC=15$ սմ հատվածների: գտեք  $ABC$  եռանկյան մակերեսը:

378. գտեք  $ABCD$  քառանկյան մակերեսը, եթե  $AB=5$ սմ,  $BC=13$ սմ,  $CD=9$ սմ,  $DA=15$ սմ,  $AC=12$ սմ:

379. գտեք հավասարասրուն սեղանի մակերեսը, եթե. **ա)** նրա փոքր կողմը 18սմ է. բարձրությունը՝ 9սմ, իսկ սուր անկյունը՝  $45^\circ$ , **բ)** նրա հիմքերը 16սմ և 30սմ են, իսկ անկյունագծերը փոխուղղահայաց են:

380. գտեք հավասարասրուն սեղանի մակերեսը, եթե նրա բարձրությունը  $h$  է, իսկ անկյունագծերը փոխուղղահայաց են:

381. Հավասարասրուն սեղանի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են, իսկ նրա հիմքերի գումարը 2a է: գտեք սեղանի մակերեսը:

382. Ապացուցեք, որ եթե  $ABCD$  քառանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց են, ապա  $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$ :

383.  $AD=17$ սմ և  $BC=5$ սմ հիմքերով և  $AB=10$ սմ սրունքով  $ABCD$  հավասարասրուն սեղանի  $B$  գագաթով տարված է մի ուղիղ, որը կիսում է  $AC$  անկյունագիծը, իսկ  $AD$  հիմքը հատում է  $M$  կետում: գտեք  $BDM$  եռանկյան մակերեսը:

384.  $\alpha$  կողմով երկու քառակուսի ունեն մի ընդհանուր գագաթ, ընդ որում՝ նրանցից մեկի կողմը գտնվում է մյուսի անկյունագծի վրա: գտեք այդ քառակուսիների ընդհանուր մասի մակերեսը:

385. խորանարդի մի նիստի անկյունագիծը  $\alpha$  է: գտեք այդ խորանարդի մակերևույթի մակերեսը:

386. Ուղղանկյունանիստի հիմքը  $\alpha$  կողմով քառակուսի է, իսկ կողմնային նիստերից յուրաքանչյուրի անկյունագիծը հիմքի կողի հետ կազմում է  $60^\circ$  անկյուն: գտեք ուղղանկյունանիստի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

387. գտեք այն ուղղանկյունանիստի լրիվ մակերևույթի մակերեսը, որի նույն գագաթով անցնող կողերն ունեն  $\alpha$ ,  $2\alpha$  և  $3\alpha$  երկարություններ:

?

Հաշվարկիչի օգնությամբ լուծելու խնդիրներ

388. Զուգահեռագծի հիմքը 11,735սմ է, իսկ բարձրությունը հիմքից փոքր է 3,485սմ-ով: գտեք զուգահեռագծի մակերեսը պահանջվող ճշգրտությամբ. **ա)** մինչև 0,001մ<sup>2</sup>, **բ)** մինչև 0,01մ<sup>2</sup>, **գ)** մինչև 0,1մ<sup>2</sup>:

389.  $ABC$  եռանկյան մեջ  $AB=6,52$ սմ,  $AC=4,47$ սմ, իսկ  $A_1B_1C_1$  եռանկյան մեջ  $A_1B_1=5,27$ սմ,  $A_1C_1=2,12$ սմ, ընդ որում՝  $\angle A = \angle A_1$ : գտեք



$ABC$  և  $A_1B_1C_1$  եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը մինչև 0,01 ճշգրտությամբ:

390. Սեղանի հիմքերը հավասար են 1,17դմ և 3,58դմ, իսկ բարձրությունը՝ 2,33դմ: Գտեք սեղանի մակերեսը՝ մինչև 0,01դմ<sup>2</sup> ճշգրտությամբ:

391. Ուղղանկյան մակերեսը 17,635սմ<sup>2</sup> է, իսկ կողմերից մեկը՝ 5,28սմ: Գտեք կից կողմը՝ տրված ճշգրտությամբ.  $\alpha$ )մինչև 0,01սմ,  $\beta$ )մինչև 0,1սմ:

392. Եռանկյան երկու կողմերը հավասար են 5,62մ և 7,19մ, իսկ դրանցից առաջինին տարված բարձրությունը՝ 4,35մ: Գտեք երկրորդ կողմին տարված բարձրությունը՝ մինչև 1սմ ճշգրտությամբ:

393\*. Ուղղանկյան  $a$  և  $b$  կողմերը չափվել են մինչև 0,1սմ ճշգրտությամբ: Օգտվելով այդ չափումներից՝ կարելի՞ է, արդյոք, ուղղանկյան  $S$  մակերեսը հաշվել մինչև 1սմ<sup>2</sup> ճշգրտությամբ, եթե չափման արդյունքում ստացվել են.  $\alpha$ ) $a=2,5$ սմ,  $b=1,7$ սմ,  $\beta$ ) $a=3,2$ սմ,  $b=2,5$ սմ,  $\gamma$ ) $a=5,6$ սմ,  $b=7,2$ սմ:

394. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը հավասար են 7,25սմ և 3,67սմ: Գտեք ներքնաձիգը՝ մինչև 0,01սմ ճշգրտությամբ:

395. Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը 11,2դմ է, իսկ էջերից մեկը երեք անգամ փոքր է ներքնաձիգից: Գտեք մյուս էջը.  $\alpha$ )մինչև 1սմ ճշգրտությամբ,  $\beta$ )մինչև 0,1սմ ճշգրտությամբ:

396\*. Ուղղանկյուն եռանկյան  $a$  և  $b$  էջերը չափվել են մինչև 0,1սմ ճշգրտությամբ և ստացել հետևյալ արդյունքները.  $a \approx 3,5$ սմ,  $b \approx 4,8$ սմ: Օգտվելով չափման այդ արդյունքներից՝ կարելի՞ է, արդյոք, ներքնաձիգը հաշվել.  $\alpha$ )մինչև 0,1սմ ճշգրտությամբ,  $\beta$ )մինչև 0,2սմ ճշգրտությամբ:



# ՆԱԽ

## ԵՈՒՆԿՅՈՒՆՆԵՐ



### § 1 ՆՍԱՆ ԵՈՒՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ

**44** **Համեմատական հատվածներ:**  $AB$  և  $CD$  հատվածների համեմատությունը կոչվում է նրանց երկարությունների հարաբերությունը, այսինքն՝  $\frac{AB}{CD}$ -ն: Ասում են, որ  $AB$  և  $CD$  հատվածները

համեմատական են  $A_1B_1$  և  $C_1D_1$  հատվածներին, եթե  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$ :

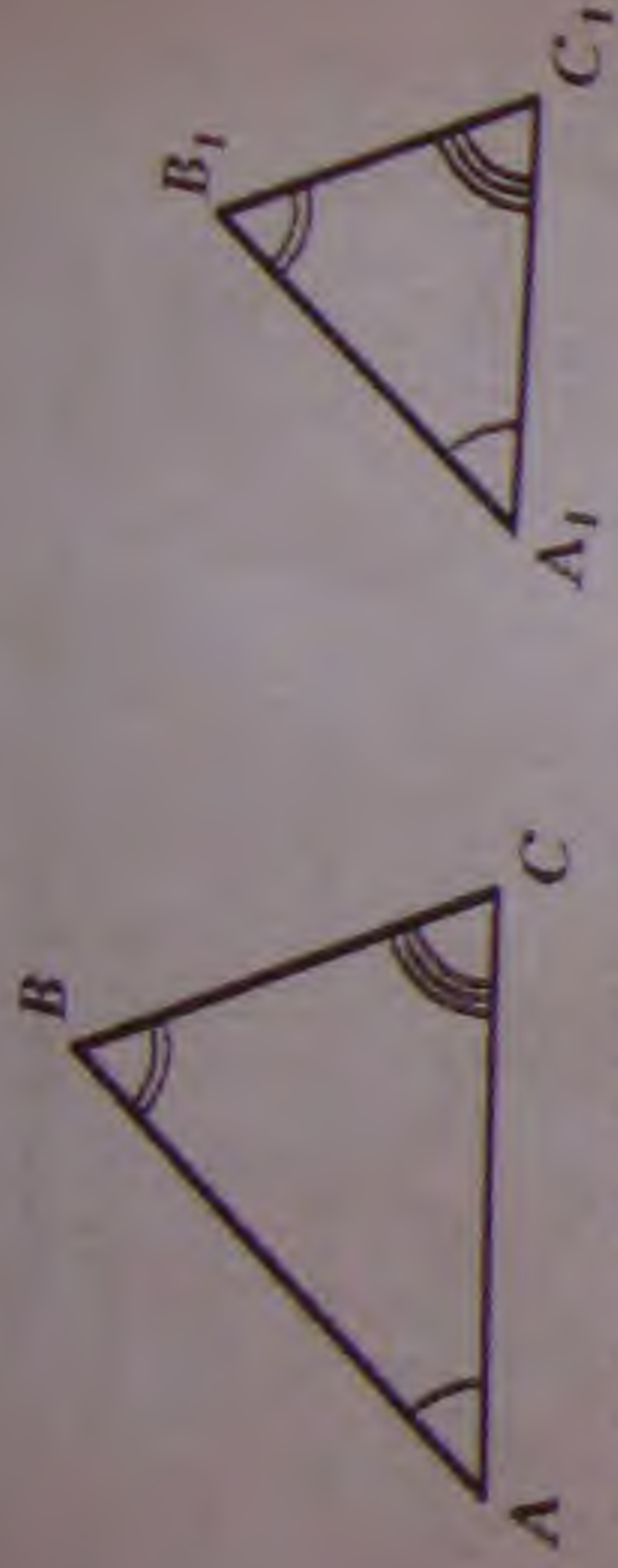
Օրինակ,  $AB$  և  $CD$  հատվածները, որոնց երկարություններն են 2սմ և 1սմ, համեմատական են  $A_1B_1$  և  $C_1D_1$  հատվածներին, որոնց երկարություններն են 3սմ և 1,5սմ: Իսկապես,  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{2}{3}$ :

Համեմատականության հասկացությունը<sup>1</sup> ներմուծվում է նաև շատ թվով հատվածների համար: Օրինակ,  $AB$ ,  $CD$  և  $EF$  երեք հատվածները համեմատական են  $A_1B_1$ ,  $C_1D_1$ , և  $E_1F_1$  երեք հատվածներին, եթե  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{EF}{E_1F_1}$ :

**45** **Նման եռանկյունների սահմանումը:** Հաճախ հանդիպում են այնպիսի առարկաներ, որոնց ձևը նույնն է, իսկ չափերը տարբեր են: Օրինակ, ֆուտբոլի և բենիսի գնդակները, կլոր ափսե՝ և սկավառակը: Ընդունված է երկրաչափության մեջ միևնույն ձևն ունեցող պատկերներն անվանել *նման պատկերներ*: Նման են, օրինակ, ցանկացած երկու քառակուսին, երկու շրջանը և այլն: Ներմուծենք նման եռանկյունների հասկացությունը:

<sup>1</sup> Համեմատական հատվածներին անվանում են նաև համամասնական հատվածներ:





Նմանակ կողմերն են՝  $AB$  և  $A_1B_1$ ,  $BC$  և  $B_1C_1$ ,  $CA$  և  $C_1A_1$   
նկ. 85

Դիցուք երկու՝  $ABC$  և  $A_1B_1C_1$  եռանկյունների անկյունները համապատասխանաբար հավասար են.  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ : Այդ դեպքում հետևյալ կողմերը՝  $AB$ -ն և  $A_1B_1$ -ը,  $BC$ -ն և  $B_1C_1$ -ը,  $CA$ -ն և  $C_1A_1$ -ը կոչվում են նմանակ կողմեր (նկ. 85):

Սահմանում: Երկու եռանկյուններ կոչվում են նման, եթե նրանց անկյունները համապատասխանաբար հավասար են, և եռանկյուններից մեկի կողմերը համեմատական են մյուսի նմանակ կողմներին:

Այլ խոսքով՝ երկու եռանկյուններ նման են, եթե կարելի է դրանք նշանակել  $ABC$  և  $A_1B_1C_1$  տառերով այնպես, որ

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1, \quad (1)$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k: \quad (2)$$

$k$  թիվը, որը հավասար է եռանկյունների նմանակ կողմերի հարաբերությանը, կոչվում է նմանության գործակից:

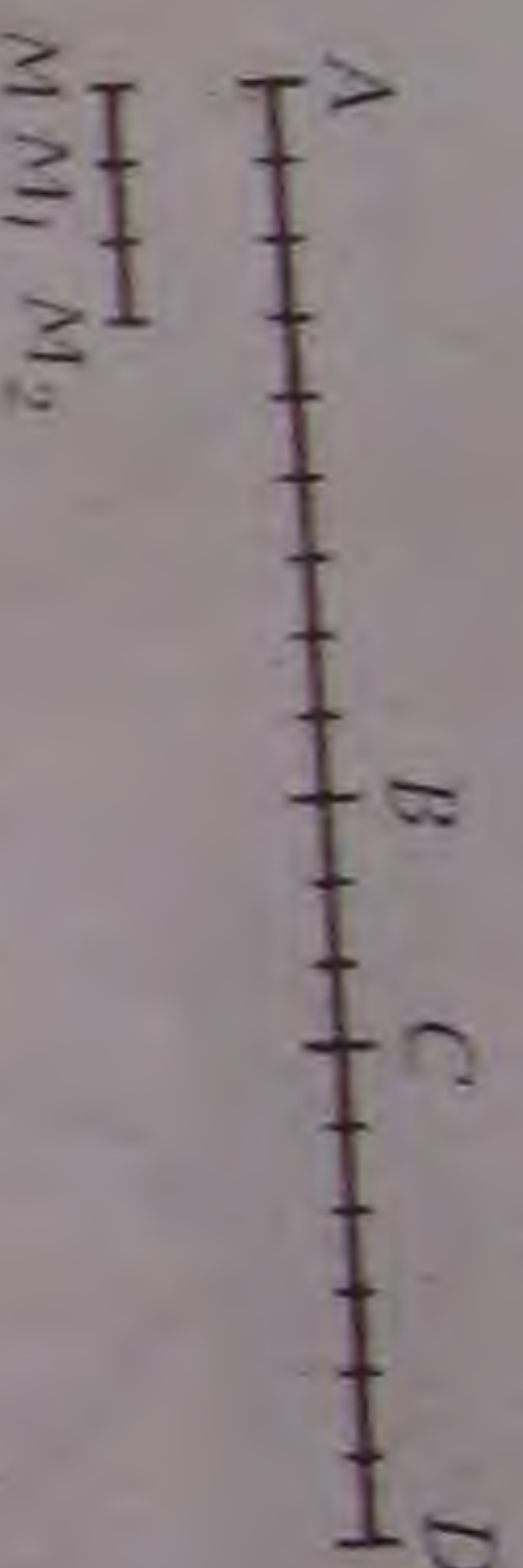
$ABC$  և  $A_1B_1C_1$  եռանկյունների նմանությունը նշանակվում է այսպես.  $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ : Նկար 85-ում պատկերված են նման եռանկյուններ:

Պարզվում է, որ եռանկյունների նմանությունը կարելի է հաստատել՝ ստուգելով (1) և (2) հավասարություններից միայն մի քանիսը: Այդ կարևոր հարցը մենք կուսումնասիրենք հաջորդ պարագրաֆում, որտեղ կդիտարկենք եռանկյունների նմանության երեք հայտանիշ:

### Հարցեր և խնդիրներ

**397.** Գտեք  $AB$  և  $CD$  հատվածների հարաբերությունը, եթե նրանց երկարությունները համապատասխանաբար հավասար են 15սմ և 20սմ: Արդյոք կփոխվի՞ այդ հարաբերությունը, եթե հատվածների երկարություններն արտահայտվեն միլիմետրերով:





Նկ. 86

398. Արդյոք համեմատական են ճկար 86-ում պատկերված հետևյալ հատվածները. **ա)**  $AC$ ,  $CD$  և  $M_1M_2$ ,  $MM_1$ , **բ)**  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  և  $MM_2$ ,  $MM_1$ ,  $M_1M_2$ , **գ)**  $AB$ ,  $BD$  և  $MM_1$ ,  $M_1M_2$ :
399.  $AB$ ,  $CD$  հատվածները համեմատական են  $EF$ ,  $MN$  հատվածներին: Գտեք  $EF$ -ը, եթե  $AB=5$ սմ,  $CD=80$ սմ,  $MN=1$ դմ:
400.  $KP$  և  $MN$  հատվածները  $DO$  և  $AL$  հատվածներին համեմատական են: Գտեք  $AL$ -ը, եթե  $KP=8$ դմ,  $MN=40$ սմ,  $OD=1$ մ:
401.  $ABCD$  զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են  $O$  կետում, և  $CD$  կողմը 10սմ է: Գտեք զուգահեռագծի պարագիծը, եթե  $\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{OC}$ :
402.  $ABC$  և  $MNK$  եռանկյունները նման են: Նշեք եռանկյունների նմանակ կողմերը, եթե. **ա)**  $\angle A = \angle M$ ,  $\angle B = \angle N$ ,  $\angle C = \angle K$ , **բ)**  $\angle A = \angle K$ ,  $\angle C = \angle M$ :
403.  $ABC$  և  $DEF$  եռանկյունները նման են:  $\angle A = \angle D$ ,  $\angle C = \angle F$ ,  $EF=14$ սմ,  $DF=20$ սմ,  $BC=21$ սմ: Գտեք  $AC$ -ն:
404. Նման են, արդյոք,  $ABC$  և  $DEF$  եռանկյունները, եթե  $\angle A=106^\circ$ ,  $\angle B=34^\circ$ ,  $\angle E=106^\circ$ ,  $\angle F=40^\circ$ ,  $AC=4,4$ սմ,  $AB=5,2$ սմ,  $BC=7,6$ սմ,  $DE=15,6$ սմ,  $DF=22,8$ սմ,  $EF=13,2$ սմ:
405.  $ABC$  և  $KMN$  նման եռանկյունների մեջ  $AB$  և  $KM$ ,  $BC$  և  $MN$  կողմերը նմանակ են: Գտեք  $KMN$  եռանկյան կողմերը, եթե  $AB=4$ սմ,  $BC=5$ սմ,  $CA=7$ սմ,  $\frac{KM}{AB} = 2,1$ :
406.  $KPF$  և  $EMT$  եռանկյունները նման են, ընդ որում  $\frac{KP}{ME} = \frac{PF}{MT} = \frac{KF}{ET}$ ,  $\angle F=20^\circ$ ,  $\angle E=40^\circ$ : Գտեք այդ եռանկյունների մնացած անկյունները:
407. Նման եռանկյունների երկու նմանակ կողմերն են 2սմ և 5սմ: Առաջին եռանկյան երկու մյուս կողմերն են 3սմ և 4սմ: Գտեք երկրորդ եռանկյան պարագիծը:
408. Նման ուղղանկյուն եռանկյունների երկու նմանակ կողմերը հարաբերում են, ինչպես 2:3: Եռանցից առաջինի էջերն են 3սմ և 4սմ: Գտեք յուրաքանչյուր եռանկյան մակերեսը:



409. Նկար 87-ում  $ABC$  և  $DEC$  եռանկյունները նման են, ընդ որում  $DE$ -ն և  $AB$ -ն զուգահեռ չեն,  $AD=6$ սմ,  $DC=10$ սմ,  $BC=14$ սմ: Գտեք  $CE$ -ն:



Նկ. 87

410. Հողամասի հատակագիծն ունի հավասարաբարուն ուղղանկյուն եռանկյան ձև: Հատակագծում պատկերված եռանկյան մակերեսը  $72$ սմ<sup>2</sup> է: Գտեք հողամասի մակերեսը, եթե նրա հատակագիծը կատարվել է  $1:1000$  մասշտաբով:

411. Հավասարաբարուն ուղղանկյուն եռանկյան տեսք ունեցող այգու մակերեսը՝  $8$ հա է, իսկ նրա հատակագծում պատկերված եռանկյան մակերեսը՝  $200$ սմ<sup>2</sup>: Ի՞նչ մասշտաբով է գծվել այգու հատակագիծը:

## § 2

### ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ

46) Եռանկյունների նմանության առաջին հայտարարիչը:

Թ ե ո թ ն մ : Եթե մի եռանկյան երկու անկյունները համապատասխանաբար հավասար են մյուս եռանկյան երկու անկյուններին, ապա այդպիսի եռանկյունները նման են:

Ա պ ա գ ո լ ո լ մ : Դիցուք  $ABC$ -ն և  $A_1B_1C_1$ -ը երկու այնպիսի եռանկյուններ են, որոնցում  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$  (նկ. 88): Ապացուցենք, որ  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ :

Ըստ եռանկյան անկյունների գումարի մասին թեորեմի՝  $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$ ,  $\angle C_1 = 180^\circ - \angle A_1 - \angle B_1$ : Հետևաբար՝  $\angle C = \angle C_1$ : Այսպիսով,  $ABC$  եռանկյան անկյունները համապատասխանաբար հավասար են  $A_1B_1C_1$  եռանկյան անկյուններին:



Նկ. 88



Ապացուցենք, որ  $ABC$  և  $A_1B_1C_1$  եռանկյունների նմանակ կողմերը

համեմատական են: Քանի որ  $\angle A = \angle A_1$  և  $\angle C = \angle C_1$ , ապա

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \quad \text{և} \quad \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1} \quad (\text{տես կետ 38-ը}):$$

Այս հավասարություններից հետևում է.  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ : Այսին

երանակով, օգտվելով  $\angle A = \angle A_1$  և  $\angle B = \angle B_1$ , հավասարություններից, ստանում ենք  $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$ :

Այսպիսով՝  $ABC$  և  $A_1B_1C_1$  եռանկյունների նմանակ կողմերը համեմատական են: Թեորեմն ապացուցված է:

#### 47) Եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշը:

Թեորեմ: Եթե մի եռանկյան երկու կողմերը համեմատական են մյուս եռանկյան երկու կողմերին, իսկ այդ կողմերով կազմված անկյունները հավասար են, ապա այդպիսի եռանկյունները նման են:

Ապացուցում: Դիտարկենք երկու՝  $ABC$  և  $A_1B_1C_1$  եռանկյուններ, որոնցում  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ ,  $\angle A = \angle A_1$ , (նկ. 89,ա):

Ապացուցենք, որ  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ : Դրա համար, նկատի ունենալով եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշը, բավական է ապացուցել, որ  $\angle B = \angle B_1$ :

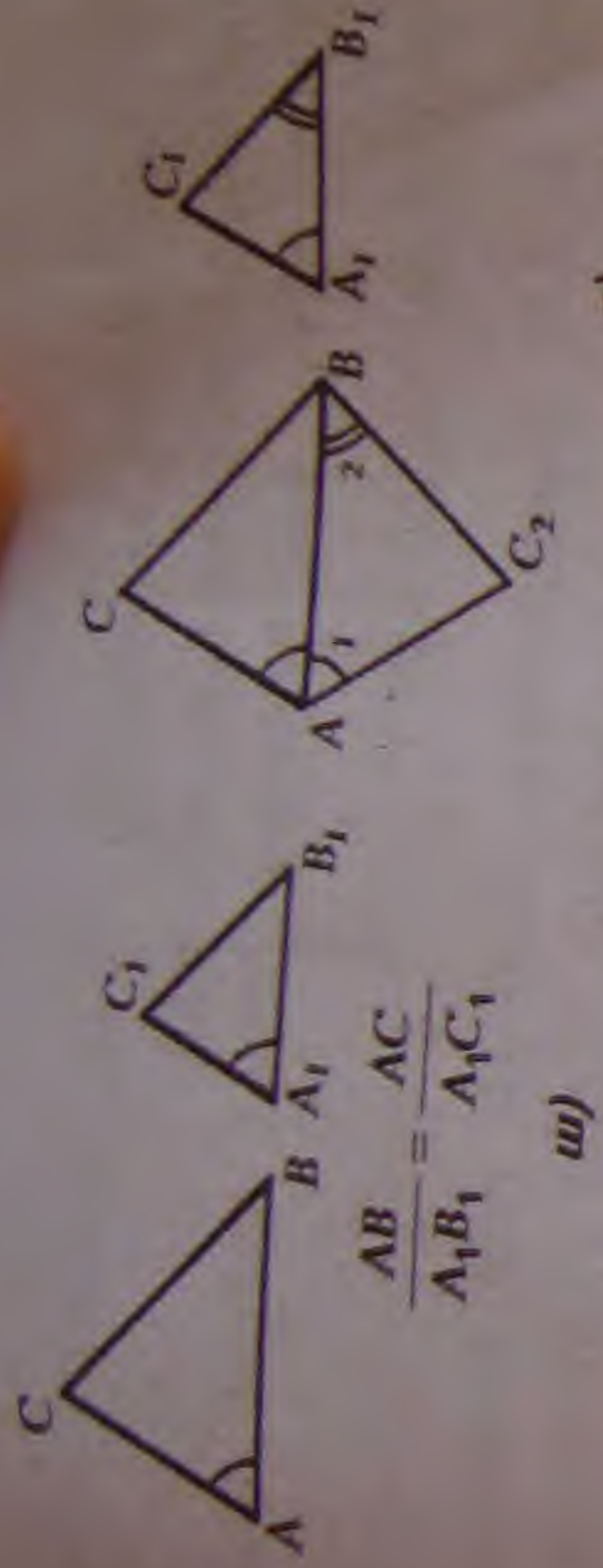
Դիտարկենք այնպիսի  $ABC_2$  եռանկյուն, որում  $\angle 1 = \angle A_1$ ,  $\angle 2 = \angle B_1$  (նկ. 89,բ): Ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի՝  $ABC_2$  և  $A_1B_1C_1$  եռանկյունները նման են: Ուրեմն՝  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$ : Այսու

կողմից, ըստ պայմանի՝  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ : Այս երկու հավասարություն-

ներից ստանում ենք, որ  $AC = AC_2$ : Այսպիսով,  $ABC$  և  $ABC_2$  եռանկյունները հավասար են՝ ըստ երկու կողմի և նրանց կազմած անկյան ( $AB$ -ն ընդհանուր կողմ է,  $AC = AC_2$  և  $\angle A = \angle 1$ , քանի որ  $\angle A = \angle A_1$  և  $\angle 1 = \angle A_1$ ): Դրանից հետևում է, որ  $\angle B = \angle 2$ : Իսկ քանի որ  $\angle 2 = \angle B_1$ , ապա  $\angle B = \angle B_1$ :

Թեորեմն ապացուցված է:





Նկ. 89

**48) Եռանկյունների նմանության երրորդ հայտարարիչը:**

Թեորեմ: Եթե մի եռանկյան երեք կողմերը համեմատական են մյուս եռանկյան երեք կողմերին, ապա այդպիսի եռանկյունները նման են:

Ապացուցում: Դիցուք՝  $ABC$  և  $A_1B_1C_1$  եռանկյունների կողմերը համեմատական են. 
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} \quad (1)$$

Ապացուցենք, որ  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ : Դրա համար, հաշվի առնելով եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտարարիչը, բավական է ապացուցել, որ  $\angle A = \angle A_1$ :

Դիտարկենք այնպիսի  $ABC_2$  եռանկյուն, որում  $\angle 1 = \angle A_1$ ,  $\angle 2 = \angle B_1$  (Նկ. 89,բ): Ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտարարիչի՝  $ABC_2$  և  $A_1B_1C_1$  եռանկյունները նման են: Ուրեմն՝

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} = \frac{C_2A}{C_1A_1}.$$

Համեմատելով այս և (1) հավասարությունները՝ ստանում ենք.  $BC = BC_2$ ,  $CA = C_2A$ : Այսպիսով,  $ABC$  և  $ABC_2$  եռանկյունները հավասար են՝ ըստ երեք կողմի: Դրանից հետևում է, որ  $\angle A = \angle 1$ : Եվ քանի որ  $\angle 1 = \angle A_1$ , ուրեմն  $\angle A = \angle A_1$ : Թեորեմն ապացուցված է:

**49) Եռանկյունների նմանության մի քանի կիրառություններ:**  
*ա. եռանկյան միջին գծի հատկությունը:* Եռանկյան միջին գիծ մենք անվանել ենք նրա երկու կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածը: Ապացուցել ենք թեորեմ եռանկյան միջին գծի մասին. այն է՝ եռանկյան միջին գիծը զուգահեռ է նրա կողմերից մեկին և հավասար է այդ կողմի կեսին:



Այժմ այս թեորեմն ավացուցնենք մեկ այլ եղանակով՝ օգտվելով եռանկյունների նմանության հայտանիշներից:

Դիցուք  $MN$ -ը  $ABC$  եռանկյան միջին գիծն է (նկ. 90):

Ապացուցենք, որ  $MN \parallel AC$  և  $MN = \frac{1}{2}AC$ :

$BMN$  և  $BAC$  եռանկյունները նման են ըստ եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշի ( $\angle B$ -ն ընդհանուր է,

$$\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}): \text{ ուրեմն } \angle 1 = \angle 2 \text{ և } \frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}: \text{ Առաջին } \angle 1 = \angle 2, \text{ հա-}$$

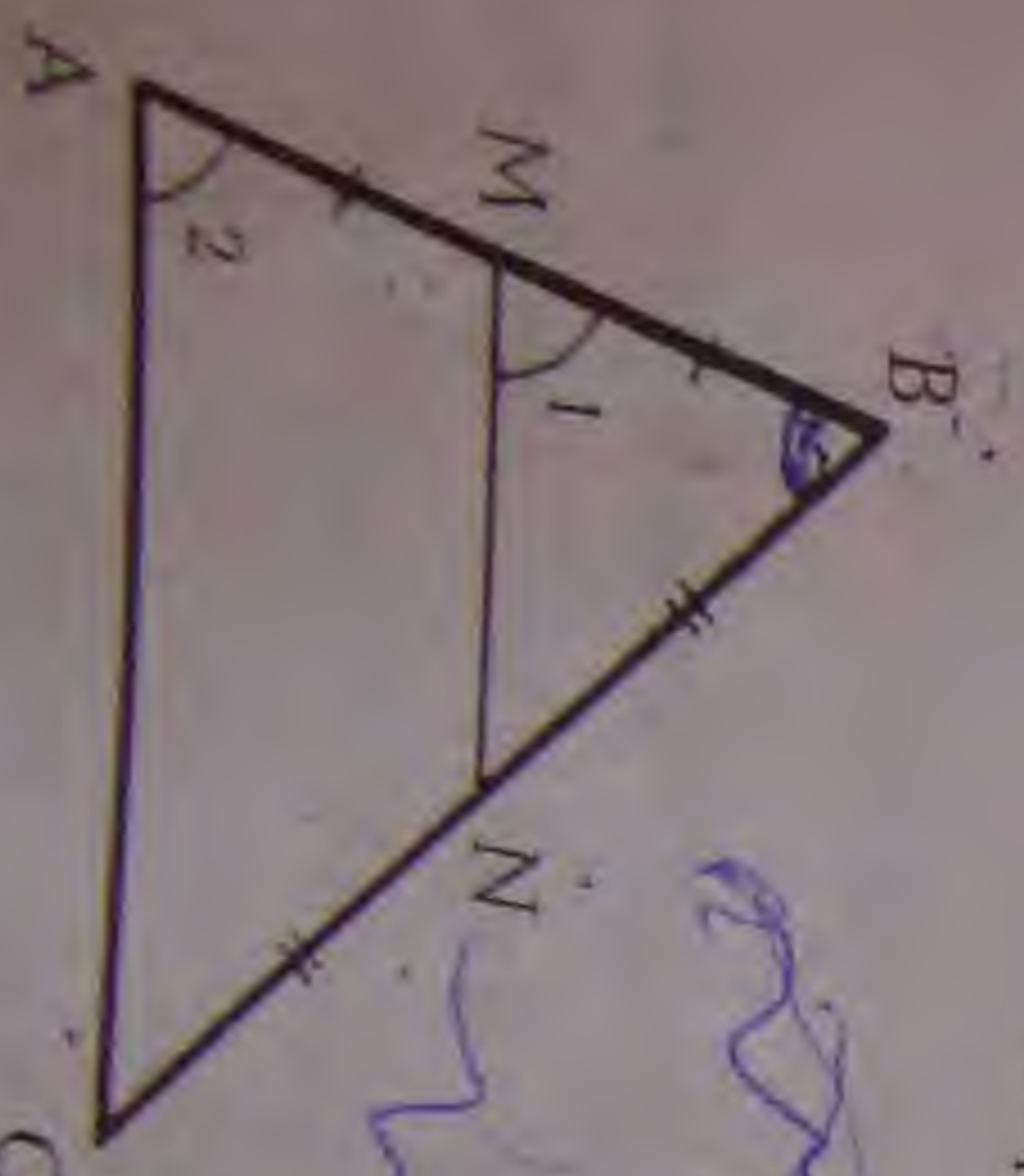
վասարությունից բխում է, որ  $MN \parallel AC$  (բացատրենք՝ ինչո՞ւ), իսկ երկ-  
րորդ հավասարությունից՝  $MN = \frac{1}{2}AC$ : Ապացուցումն ավարտված է:

**բ. եռանկյան միջնագծերի հատկությունը:** Մենք գիտենք, որ եռանկյան չորս նշանակող կետերից մեկը նրա միջնագծերի հատման կետն է: Պարզվում է, որ եռանկյան միջնագծերն օժտված են մի կարևոր հատկությամբ. այն է՝ *եռանկյան միջնագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետով տրոհվում 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:*

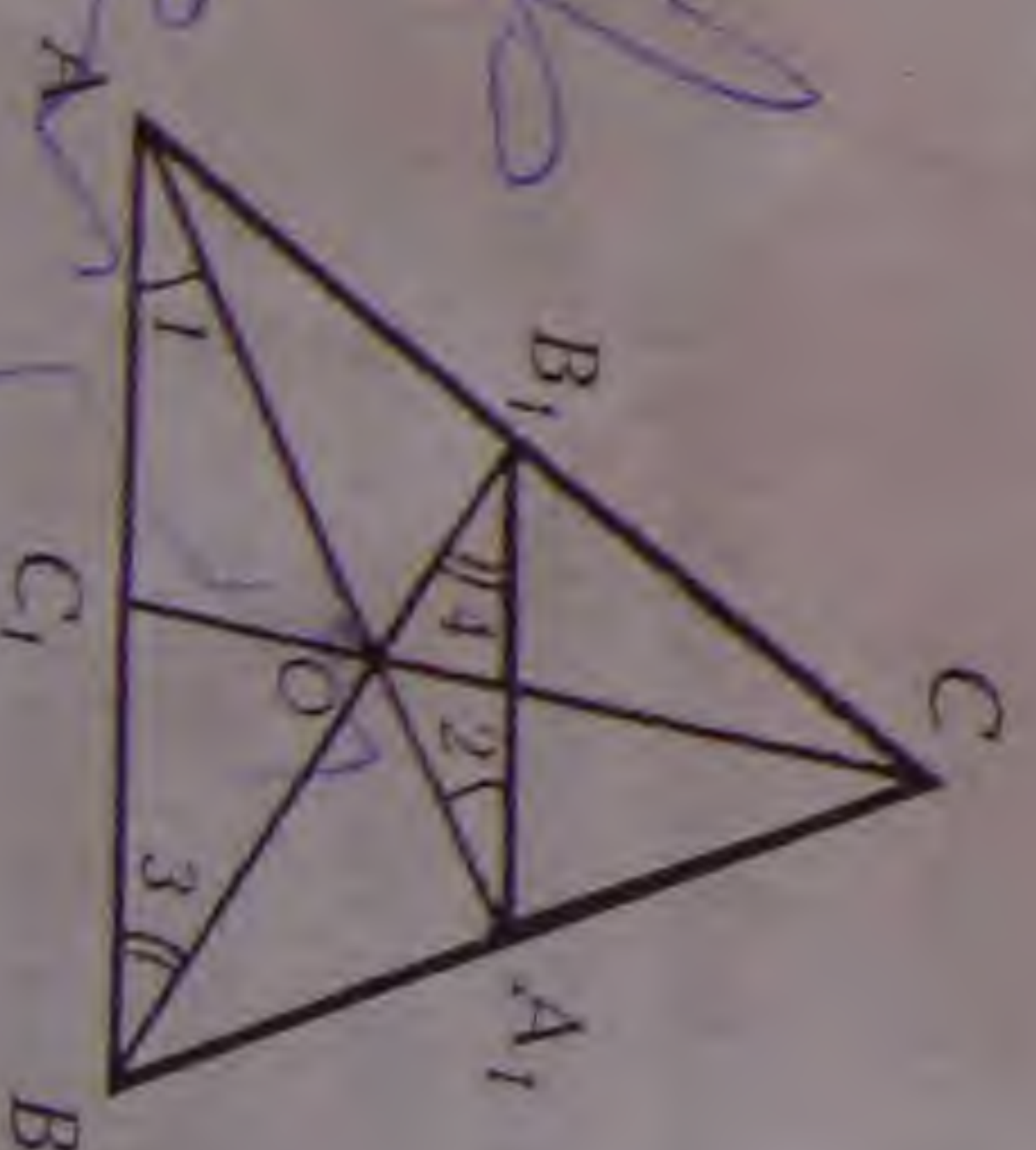
Այս հատկությունն ավացուցելիս դարձյալ օգտվենք եռանկյունների նմանության հայտանիշներից:

Դիտարկենք կամայական  $ABC$  եռանկյուն:  $O$  տառով նշանակենք նրա  $AA_1$  և  $BB_1$  միջնագծերի հատման կետը և տանենք  $A_1B_1$  միջին գիծը (նկ. 91): Քանի որ  $A_1B_1$ -ը զուգահեռ է  $AB$  կողմին, ուրեմն  $\angle 1 = \angle 2$  և  $\angle 3 = \angle 4$ : Հետևաբար  $AOB$  և  $A_1OB_1$  եռանկյունները, ըստ երկու անկյան, նման են: Դա նշանակում է, որ այդ եռանկյունների կողմերը համեմատական են.

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}:$$



Նկ. 90



Նկ. 91



օգտվելով

(նկ. 90):

նկյունների  
անուր է,

$\angle 1 = \angle 2$ , հա-

յտ, իսկ երկ-

րված է:

տեք, որ  
ի հատման  
ած են մի  
ատվում են  
րությամբ

եռանկյուն-

նշանակենք  
 $A_1B_1$  միջին  
են  $\angle 1 = \angle 2$   
ըստ երկու  
ի կողմերը



Նկ. 92

բայց քանի որ  $AB=2A_1B_1$ , ապա  $AO=2A_1O$  և  $BO=2B_1O$ : Այսպիսով,  $AA_1$  և  $BB_1$  միջնագծերից յուրաքանչյուրը հատման  $O$  կետով տրոհվում է 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:

Նույն կերպ ապացուցվում է, որ  $BB_1$  և  $CC_1$  միջնագծերը ևս հատման կետով տրոհվում են նույն 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից: Հետևաբար՝ այդ հատման կետը համընկնում է  $O$  կետին:

Այսպիսով  $ABC$  եռանկյան բոլոր միջնագծերը հատվում են  $O$  կետում և այդ կետով տրոհվում 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:

Ապացուցումն ավարտված է:



## Հարցեր և խնդիրներ

**412.** Ըստ նկար 92-ի տվյալների՝ գտեք  $x$ -ը և  $y$ -ը:

**413.**  $ABC$  և  $DEF$  եռանկյունների մեջ  $\angle A = \angle E$ ,  $\angle C = \angle F$ ,  $AC = 6$ ,  $EF = 2$ ,  $AB = 3,3$ :  $DF$  կողմը  $BC$  կողմից փոքր է 3,2-ով: Գտեք այդ եռանկյունների անհայտ կողմերը:

$$\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC}$$

**414.**  $AB$  և  $CD$  հատվածները հատվում են  $O$  կետում, են  $O$  կետում,

Ապացուցեք, որ  $\angle CBO = \angle DAO$ :

**415.** Ապացուցեք, որ նկար 93-ում պատկերված եռանկյունները նման են: Պարզաբանեք  $AB$  և  $DE$  ուղիղների փոխադարձ դասավորութիւնը:



Նկ. 93



416.  $ABCD$  գուգափեռագծի  $A$  գագաթով տարված է ուղիղ, որը հասում է  $BC$  կողմը  $E$  կետում, իսկ  $DC$  կողմի շարունակությունը  $F$  կետում: Ապացուցեք, որ  $\triangle ABE \sim \triangle EFC$ :

417.  $ABCD$  գուգափեռագծի  $CD$  կողմի վրա նշված է  $E$  կետը:  $AE$  և  $BC$  ուղիղները հատվում են  $F$  կետում: Գտեք. ա)  $EF$ -ը և  $FC$ -ն, եթե  $DE=8$ սմ,  $EC=4$ սմ,  $BC=7$ սմ,  $AE=10$ սմ, բ)  $DE$ -ն և  $EC$ -ն, եթե  $AB=8$ սմ,  $AD=5$ սմ,  $CF=2$ սմ:

418.  $AB$  և  $CD$  հիմքերով  $ABCD$  սեղանի անկյունագծերը հատվում են  $O$  կետում: Ապացուցեք, որ  $ABO$  և  $CDO$  եռանկյունները նման են:

419.  $AB$  և  $CD$  հիմքերով  $ABCD$  սեղանի անկյունագծերը հատվում են  $O$  կետում: Գտեք. ա)  $AB$ -ն, եթե  $OB=4$ սմ,  $OD=10$ սմ,  $DC=25$ սմ, բ)  $\frac{AO}{OC}$ -ն և  $\frac{BO}{OD}$ -ն, եթե  $AB=a$ ,  $DC=b$ , գ)  $AO$ -ն, եթե  $AB=9,6$ դմ,  $DC=24$ սմ,  $AC=15$ սմ:

420. Նմա՞ն են, արդյոք, հավասարաչափ եռանկյունները, եթե նրանք ունեն. ա) մեկական հավասար սուր անկյուն, բ) մեկական հավասար բութ անկյուն, գ) մեկական ուղիղ անկյուն: Պատասխանը հիմնավորեք:

421.  $ABC$  եռանկյան  $AB$  կողմը 15սմ է, իսկ  $AC$  կողմը՝ 20սմ:  $AB$  կողմի վրա անջատված է  $AD=8$ սմ, իսկ  $AC$  կողմի վրա՝  $AE=6$ սմ հատվածը: Նմա՞ն են, արդյոք,  $ABC$  և  $ADE$  եռանկյունները:

422. Նմա՞ն են, արդյոք, երկու ուղղանկյուն եռանկյունները, եթե դրանցից մեկն ունի  $40^\circ$ -ի անկյուն, իսկ մյուսը՝ ա)  $50^\circ$ -ին հավասար անկյուն, բ)  $60^\circ$ -ին հավասար անկյուն:

423.  $ABC$  եռանկյան  $AB$  կողմին գուգափեռ ուղիղը  $AC$  կողմը հասում է  $P$ , իսկ  $BC$  կողմը՝  $Q$  կետում: Ապացուցեք, որ  $ABC$  և  $PQC$  եռանկյունները նման են:

424.  $ABC$  եռանկյան մեջ տարված է  $AC$  կողմին գուգափեռ  $DE$  հատվածը ( $D$  կետը գտնվում է  $AB$ , իսկ  $E$  կետը՝  $BC$  կողմի վրա): Գտեք  $AD$ -ն, եթե  $AB=16$ սմ,  $AC=20$ սմ,  $DE=15$ սմ:

425.  $ABC$  եռանկյան  $AC$  կողմին գուգափեռ ուղիղը  $AB$  կողմը հասում է  $D$ , իսկ  $BC$  կողմը՝  $E$  կետում: Գտեք  $DE$  հատվածի երկարությունը, եթե ա)  $AC=20$ սմ,  $AB=17$ սմ և  $BD=11,9$ սմ, բ)  $AC=18$ դմ,  $AB=15$ դմ և  $AD=10$ դմ:

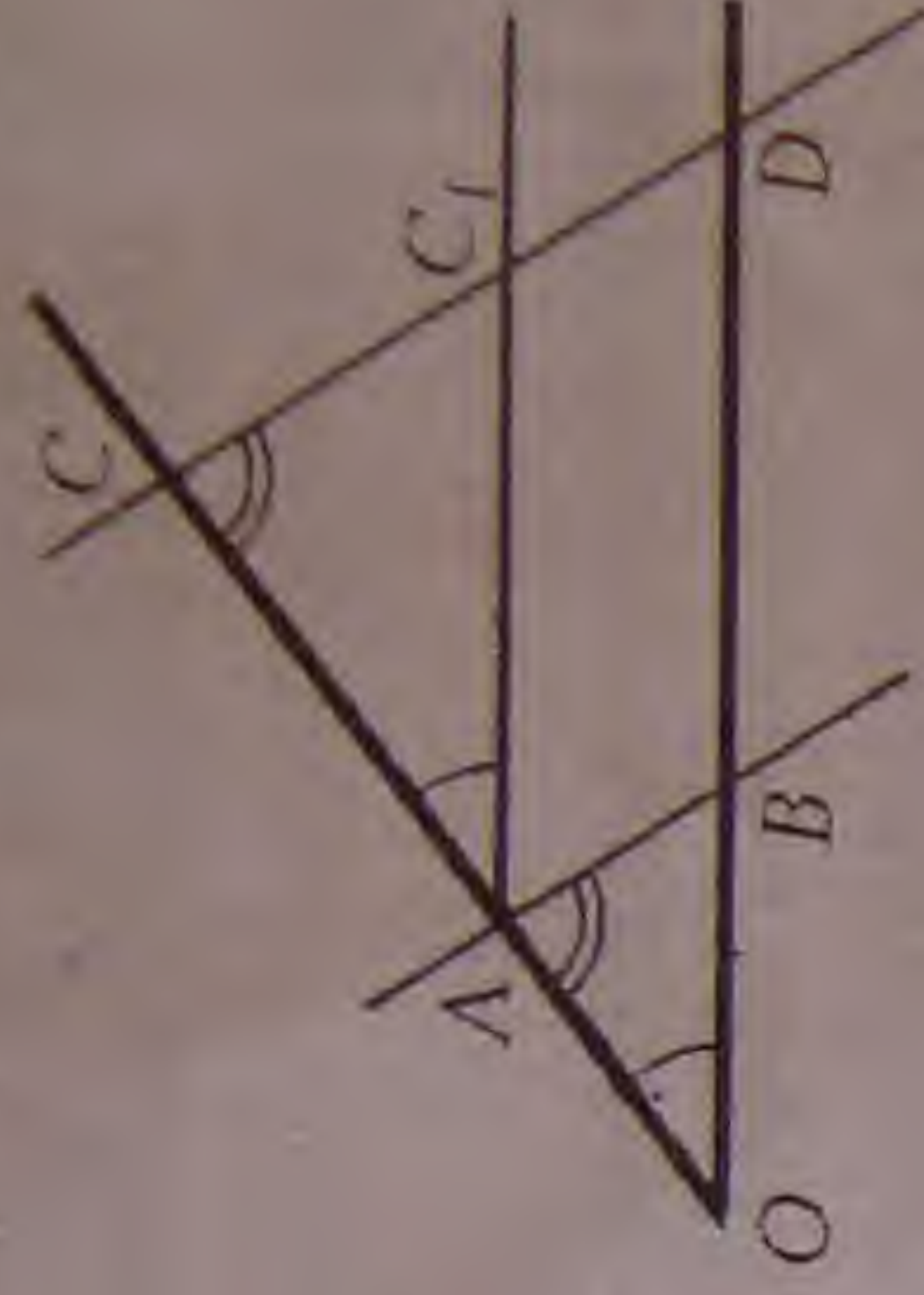
426. Սեղանի հիմքերը հավասար են 5սմ և 8սմ, իսկ սրունքները՝ 3,6սմ և 3,9սմ: Սրունքների շարունակությունները հատվում են  $M$  կետում: Գտեք  $M$  կետի հեռավորությունները փոքր հիմքի ծայրակետերից:



427.  $ABC$  եռանկյան  $AB$ ,  $BC$  և  $CA$  կողմերի վրա վերցված են, համապատասխանաբար,  $M$ ,  $N$  և  $P$  կետերն այնպես, որ  $MN \parallel AC$ ,  $NP \parallel AB$ : Գտեք  $AMNP$  քառանկյան կողմերը, եթե  $AB=10$ սմ,  $AC=15$ սմ,  $PN:MN=2:3$ , բ)  $AM=AP$ ,  $AB=a$ ,  $AC=b$ :

428.  $ABCD$  սեղանի անկյունագծերը հատվում են  $O$  կետում:  $BO$  և  $OD$  հատվածները հարաբերում են, ինչպես  $1:3$ :  $BC$  և  $AD$  հիմքերի գումարը  $4,8$ սմ է: Գտեք սեղանի հիմքերը:

429.  $O$  անկյան կողմերը հատվել են  $AB$  և  $CD$  զուգահեռ ուղիղներով: Ապացուցեք, որ  $OA$  և  $AC$  հատվածները համեմատական են  $OB$  և  $BD$  հատվածներին (նկ. 94):



Նկ. 94

Լ ու թ ու մ:  $A$  կետով տանենք  $BD$  ուղղին զուգահեռ  $AC$ , ուղիղը ( $C_1$ -ը այդ և  $CD$  ուղիղների հատման կետն է): Այդ դեպքում, ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի,  $\triangle OAB \sim \triangle ACC_1$

( $\angle O = \angle CAC_1$ ,  $\angle OAB = \angle C$ ): Հետևաբար  $\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{AC_1}$ : Քանի որ

$AC_1 = BD$  (բացատրեք, թե ինչու), ուրեմն  $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$ , ինչը և

պահանջվում է ապացուցել:

430.  $A$  անկյան կողմերը հատվել են  $BC$  և  $DE$  զուգահեռ ուղիղներով. ընդ որում  $B$  և  $D$  կետերը գտնվում են անկյան մի կողմի, իսկ  $C$  և  $E$  կետերը՝ մյուս կողմի վրա: Գտեք. ա)  $AC$ -ն, եթե  $CE=10$ սմ,  $AD=22$ սմ,  $BD=8$ սմ, բ)  $BD$ -ն և  $DE$ -ն, եթե  $AB=10$ սմ,  $AC=8$ սմ,  $BC=4$ սմ,  $CE=4$ սմ, գ)  $BC$ -ն, եթե  $AB:BD=2:1$  և  $DE=12$ սմ:

431.  $a$  և  $b$  ուղիղները հատվել են  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  զուգահեռ ուղիղներով, ընդ որում  $A$ ,  $B$  և  $C$  կետերը գտնվում են  $a$  ուղղի, իսկ  $A_1$ ,  $B_1$  և  $C_1$  կետերը՝  $b$  ուղղի վրա: Ապացուցեք, որ  $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ :

432. Տրված  $A$  անկյան կողմերից մեկի վրա տեղադրված են  $AB=5$ սմ և  $AC=16$ սմ հատվածները: Այդ անկյան մյուս կողմի վրա տեղադրված են  $AD=8$ սմ և  $AF=10$ սմ հատվածները: Արդյոք նման են  $ACD$  և  $AFB$  եռանկյունները: Պատասխանը հիմնավորեք:

433. Նման են, արդյոք,  $ABC$  և  $A_1B_1C_1$  եռանկյունները, եթե. ա)  $AB=3$ սմ,  $BC=5$ սմ,  $CA=7$ սմ,  $A_1B_1=4,5$ սմ,  $B_1C_1=7,5$ սմ,  $C_1A_1=10,5$ սմ, բ)  $AB=1,7$ սմ,  $BC=3$ սմ,  $CA=4,2$ սմ,  $A_1B_1=3,4$ սմ,  $B_1C_1=6,8$ սմ,  $C_1A_1=8,4$ սմ:



434. Ապացուցեք, որ երկու հավասարակողմ եռանկյունները նման են:

435.  $ABC$  եռանկյան  $AM$  միջնագիծը 18սմ է: Գտեք միջնագծերի հատման  $O$  կետի հեռավորությունը. **ա)**  $A$  գագաթից, **բ)**  $M$  կետից, **գ)**  $AM$  հատվածի միջնակետից:

436. Տրված եռանկյան միջնագծերն են 15սմ, 18սմ և 21սմ: Գտեք այն եռանկյան միջնագծերի երկարությունները, որի կողմերը տրված եռանկյան միջին գծերն են:

437. Ապացուցեք, որ կանաչական ուռուցիկ բառանկյան կողմերի միջնակետերը զուգահեռագծի գագաթներ են:



### Գլուխ IX-ի կրկնության հարցեր

1. Ի՞նչն է կոչվում երկու հատվածների հարաբերություն:

2. Ո՞ր դեպքում են ասում, որ  $AB$  և  $CD$  հատվածները համեմատական են  $A_1B_1$  և  $C_1D_1$  հատվածներին:

3. Սահմանք նման եռանկյունները:

4. Պարզաբանք, թե ինչ է նմանության գործակիցը:

5. Վերոհիշեք և ապացուցեք հավասար անկյուն ունեցող եռանկյունների մակերեսների հարաբերության մասին թեորեմը:

6. Ձևակերպեք և ապացուցեք եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշը:

7. Ձևակերպեք և ապացուցեք եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշը:

8. Ձևակերպեք և ապացուցեք եռանկյունների նմանության երրորդ հայտանիշը:

9. Ձևակերպեք և երկու եղանակով ապացուցեք եռանկյան միջին գծի մասին թեորեմը:

10. Ապացուցեք, որ եռանկյան միջնագծերը հատման կետով տրոհվում են 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:

### Լրացուցիչ խնդիրներ

438.  $ABC$  և  $A_1B_1C_1$  եռանկյունները նման են,  $AB=6$ սմ,  $BC=9$ սմ,  $CA=10$ սմ:  $A_1B_1C_1$  եռանկյան ամենամեծ կողմը 7,5սմ է: Գտեք  $A_1B_1C_1$  եռանկյան երկու մյուս կողմերը:

439.  $ABCD$  սեղանի  $AC$  անկյունագիծը սեղանը տրոհում է երկու նման եռանկյունների: Ապացուցեք, որ  $AC^2=ab$ , որտեղ  $a$ -ն և  $b$ -ն սեղանի հիմքերն են:



440.  $ABC$  եռանկյան  $AB$  կողմին զուգահեռ ուղիղը  $AC$  կողմը տրոհում է 2:7 հարաբերությամբ՝ հաշված  $A$  գագաթից: Գտեք հատումից  $CA=21,6$ սմ:

441. Ապացուցեք, որ  $ABC$  եռանկյան  $AM$  միջնագիծը կիսում է  $BC$  կողմին զուգահեռ յուրաքանչյուր հատվածը, որի ծայրակետերը գտնվում են  $AB$  և  $AC$  կողմերի վրա:

442. Ապացուցեք, որ  $ABC$  և  $A_1B_1C_1$  եռանկյունները նման են, եթե.  
ա)  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BM}{B_1M_1}$ , որտեղ  $BM$ -ը և  $B_1M_1$ -ը եռանկյունների

միջնագծերն են, բ)  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BH}{B_1H_1}$ , որտեղ  $BH$ -ը և  $B_1H_1$ -ը

$ABC$  և  $A_1B_1C_1$  եռանկյունների բարձրություններն են:

443.  $ABC$  եռանկյան  $AD$  միջնագծի վրա գտնվող  $M$  կետով և  $B$  գագա-

թով անցնող ուղիղը  $K$  կետում հատում է  $AC$  կողմը: Գտեք  $\frac{AK}{KC}$  հարաբերությունը, եթե. ա)  $M$ -ը  $AD$  հատվածի միջնակետն է, բ)  $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$ :

444. Ապացուցեք, որ եռանկյան գագաթները հավասարահեռ են որևէ միջին գիծն ընդգրկող ուղղից:

445. Ապացուցեք, որ եթե եռանկյուններից մեկը նման է երկրորդին, իսկ այդ երկրորդ եռանկյունը նման է երրորդին, ապա առաջին և երրորդ եռանկյունները նման են:

446. Ապացուցեք, որ սեղանի անկյունագծերի միջնակետերը միացնող հատվածը զուգահեռ է նրա հիմքերին և հավասար է դրանց կիսատարբերությանը:

447.  $ABC$  եռանկյան  $AA_1$  և  $BB_1$  միջնագծերը հատվում են  $O$  կետում: Գտեք  $ABC$  եռանկյան մակերեսը, եթե  $ABO$  եռանկյան մակերեսը 96սմ<sup>2</sup> է:

448.  $ABC$  եռանկյան  $AC$  կողմի վրա վերցված է այնպիսի  $M$  կետ, որ  $\angle ABM = \angle ACB$ : Հայտնի է, որ  $AC = 9$ սմ,  $MC = 8$ սմ: Գտեք  $AB$  կողմը:

449. Ապացուցեք, որ եթե քառանկյան հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածները փոխուղղահայաց են, ապա այդ քառանկյան անկյունագծերը հավասար են:



## Դժվարից խնդիրներ

### Քառանկյուններ

450. Տրված է  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  վեցանկյունը, որի բոլոր անկյունները հավասար են: Ապացուցեք, որ  $A_1A_2 \perp A_4A_5 = A_5A_6 \perp A_2A_3 = A_3A_4 \perp A_6A_1$ :
451.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  և  $\alpha_6$  դրական թվերը բավարարում են  $\alpha_1 - \alpha_4 = \alpha_5 - \alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_6$  պայմաններին: Ապացուցեք, որ գոյություն ունի  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  ուռուցիկ վեցանկյուն, որի բոլոր անկյունները հավասար են, ընդ որում՝  $A_1A_2 = \alpha_1, A_2A_3 = \alpha_2, A_3A_4 = \alpha_3, A_4A_5 = \alpha_4, A_5A_6 = \alpha_5, A_6A_1 = \alpha_6$ :
452. Ապացուցեք, որ կանայական ուռուցիկ քառանկյան ձև ունեցող միատեսակ սալիկներով կարելի է սալապատել հարթության ցանկացած մասը լրիվությամբ ծածկելով այն:
453. Ապացուցեք, որ ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերը հաստիվում են:
454. Ապացուցեք, որ ցանկացած ուռուցիկ քառանկյան որևէ երկու հանդիպակաց գագաթները գտնվում են մյուս երկու գագաթով անցնող ուղղի տարբեր կողմերում:
455.  $AC$  հիմքով  $ABC$  հավասարապարուն եռանկյան մեջ տարված է  $AD$  կիսորդը:  $D$  կետով անցնում է  $AD$ -ին ուղղահայաց ուղիղ, որը  $E$  կետում հատում է  $AC$  ուղիղը:  $B$  և  $D$  կետերից  $AC$  ուղղին տարված ուղղահայացների հիմքերն են  $M$ -ը և  $K$ -ն: Գտեք  $MK$ -ն, եթե  $AE = a$ :
456. Ապացուցեք, որ եռանկյան երեք միջնագծերի գումարը փոքր է պարագծից, բայց մեծ է կիսապարագծից:
457. Ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերը այն տրոհում են չորս այնպիսի եռանկյունների, որոնց պարագծերը հավասար են: Ապացուցեք, որ այդ քառանկյունը շեղանկյուն է:
458. Գտեք այն հատվածների միջնակետերի բազմությունը, որոնք տրված կետը միացնում են այդ կետով չանցնող տրված ուղղի բոլոր կետերին:
459. Ապացուցեք, որ հավասարապարուն սեղանի հիմքերի միջնակետով անցնող ուղիղն ուղղահայաց է հիմքերին: Ձևակերպեք և ապացուցեք հակադարձ պնդումը:
460. Ուղղանկյան բոլոր անկյունների կիսորդները հատվելիս առաջանում է քառանկյուն: Ապացուցեք, որ այդ քառանկյունը քառակուսի է:
461. Զուգահեռագծի կողմերից յուրաքանչյուրի վրա, գուգահեռագծից դուրս կառուցված է քառակուսի, և նշված է դրա անկյունագծերի հատման կետը: Ապացուցեք, որ այդ բոլոր կետերը քառակուսու գագաթներ են:



462.  $ABCD$  քառակուսու  $CD$  կողմի վրա նշված է  $M$  կետը:  $BAM$  անկյան կիսորդը  $K$  կետում հատում է  $BC$  կողմը: Ապացուցեք, որ  $AM=BK+DM$ :



Նկ. 95

463. Նկար 95-ում պատկերված են երեք քառակուսի: Գտեք  $\angle BAE + \angle CAE + \angle DAE$  գումարը:

464.  $ABCD$  քառակուսու ներսում վերցված է  $M$  կետն այնպես, որ  $\angle MAB = 60^\circ$ ,  $\angle MCD = 15^\circ$ : Գտեք  $\angle MBC$ -ն:

465.  $ABC$  եռանկյան կողմերի վրա, եռանկյունից դուրս, կառուցված են  $BCE$ ,  $ACTM$ ,  $BAHK$  քառակուսիները, իսկ հետո՝  $TCDQ$  և  $EBKP$  զուգահեռագծերը: Ապացուցեք, որ  $APQ$ -ն հավասարաբան ուղղանկյուն եռանկյուն է:

466. Կառուցեք հավասարասրուն սեղան՝ ըստ հիմքերի և անկյունագծերի:

467. Ապացուցեք, որ եթե եռանկյունն ունի՝ ա) համաչափության առանցք, ապա այն հավասարասրուն է, բ) համաչափության մեկից ավելի առանցքներ, ապա այն հավասարակողմ է:

## Մակերեսներ

468.  $ABCD$  զուգահեռագծի ներսում գտնվող  $M$  կետով տարված են նրա կողմերին զուգահեռ ուղիղներ, որոնք  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  և  $DA$  կողմերը հատում են, համապատասխանաբար,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  և  $T$  կետերում: Ապացուցեք, որ եթե  $M$  կետն ընկած է  $AC$  անկյունագծի վրա, ապա  $MPBQ$  և  $MRDT$  զուգահեռագծերի մակերեսները հավասար են, և հակադարձը՝ եթե  $MPBQ$  և  $MRDT$  զուգահեռագծերի մակերեսները հավասար են, ապա  $M$  կետն ընկած է  $AC$  անկյունագծի վրա:

469.  $ABCD$  զուգահեռագծի  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  և  $DA$  կողմերի միջնակետերն են, համապատասխանաբար,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  և  $T$  կետերը: Ապացուցեք, որ  $AQ$ ,  $BR$ ,  $CT$  և  $DP$  ուղիղների հատումից առաջանում է զուգահեռագիծ: Գտեք այդ և  $ABCD$  զուգահեռագծերի մակերեսների հարաբերությունը:

470. Ապացուցեք, որ սեղանի մակերեսը հավասար է սրունքներից մեկի և այն ուղղահայացի արտադրյալին, որը մյուս սրունքի միջնակետից տարված է առաջին սրունքն ընդգրկող ուղղին:

471. Սեղանի փոքր հիմքի ծայրակետերով տարված են երկու զուգահեռ ուղիղներ, որոնք հատում են մեծ հիմքը: Սեղանի անկյունա-



գծերը և այդ ուղիղները տրոհում են սեղանը՝ յոթ եռանկյան և մեկ հնգանկյան: Ապացուցեք, որ հնգանկյան մակերեսը հավասար է այն երեք եռանկյունների մակերեսների գումարին, որոնք հարակից են սրունքներին և փոքր հիմքին:

472.  $ABCD$  գուգաիտեռագծի  $AB$  կողմը  $B$  կետից շարունակված է  $BE$  հատվածով, իսկ  $AD$  կողմը  $D$  կետից՝  $DK$  հատվածով:  $ED$  և  $KB$  հատվածները հատվում են  $O$  կետում: Ապացուցեք, որ  $ABOD$  և  $CEOK$  քառանկյունների մակերեսները հավասար են:

473.  $ABCD$  ուռուցիկ քառանկյան  $AB$  և  $CD$  կողմերի  $K$  և  $M$  միջնակետերը  $KD$ ,  $KC$ ,  $MA$  և  $MB$  հատվածներով միացված են քառանկյան գագաթներին: Ապացուցեք, որ այդ հատվածների միջև ընդգրկված քառանկյան մակերեսը հավասար է այն երկու եռանկյունների մակերեսների գումարին, որոնք հարակից են  $AD$  և  $BC$  կողմերին:

474.  $A$  կետն ընկած է  $60^\circ$ -ի անկյան ներսում:  $a$ -ն և  $b$ -ն  $A$  կետի հեռավորություններն են անկյան կողմերից: Գտեք  $A$  կետի հեռավորությունը անկյան գագաթից:

475.  $ABC$  եռանկյան  $AB$  կողմը  $A$  կետից շարունակված է  $AC$ -ին հավասար  $AD$  հատվածով:  $BA$  և  $BC$  ծառագայթների վրա վերցված են  $K$  և  $M$  կետերն այնպես, որ  $BDM$  և  $BCK$  եռանկյունների մակերեսները հավասար են: Գտեք  $BKM$  անկյունը, եթե  $\angle BAC = \alpha$ :

476.  $ABCD$  ուղղանկյան ներսում վերցված է  $M$  կետը: Չայտնի է, որ  $MB = a$ ,  $MC = b$  և  $MD = c$ : Գտեք  $MA$ -ն:

477. Տարված է  $ABC$  եռանկյան  $BD$  բարձրությունը:  $KA$  հատվածն ուղղահայաց է  $AB$ -ին և հավասար՝  $DC$ -ին, իսկ  $CM$  հատվածն ուղղահայաց է  $BC$ -ին և հավասար՝  $AD$ -ին: Ապացուցեք, որ  $MB$  և  $KB$  հատվածները հավասար են:

478.  $C$  ուղիղ անկյունով  $ABC$  ուղղանկյուն եռանկյան ներսում վերցված է  $O$  կետն այնպես, որ  $S_{OAB} = S_{OAC} = S_{OBC}$ : Ապացուցեք, որ  $OA^2 + OB^2 = 5 \cdot OC^2$ :

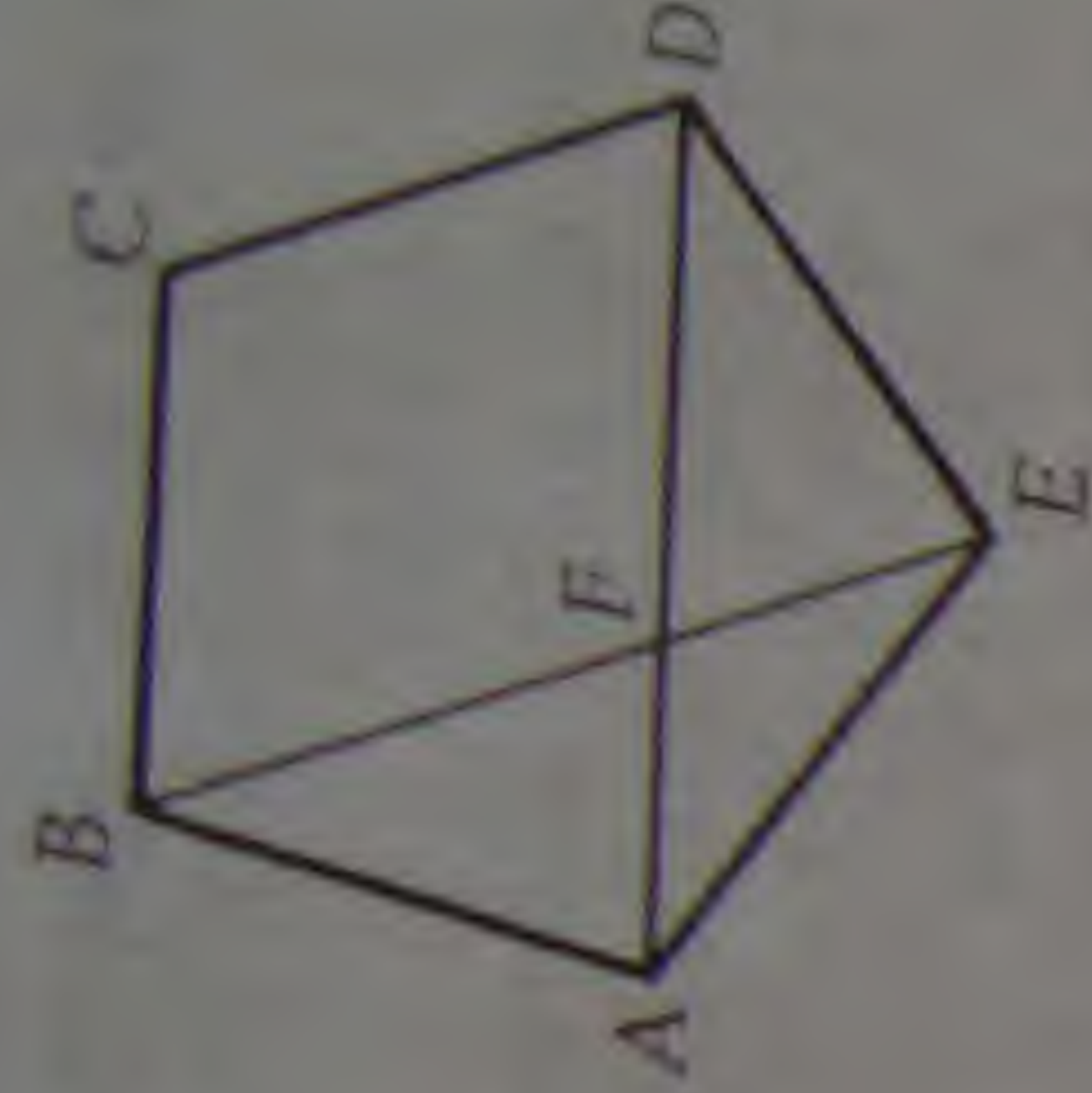
### Լման եռանկյուններ

479. Եկար 96-ուն պատկերված է  $ABCDE$  կանոնավոր հնգանկյունը, այսինքն՝ ուռուցիկ հնգանկյունը, որի բոլոր անկյունները հավասար են, և բոլոր կողմերը հավասար են: Ապացուցեք, որ.

$$\omega) \Delta AED \sim \Delta AFE, \text{բ) } \frac{DA}{DF} = \frac{DF}{AF}:$$



480. Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը այնպիսի քառակուսու կողմ է, որը չի ծածկում այդ եռանկյունը: Գտեք այդ քառակուսու անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից, եթե նրա եզերի գումարը  $a$  է:



Նկ. 96

481.  $AOB$  անկյան ներքին տիրույթի  $M$  կետից տարված են նրա  $OA$  և  $OB$  կողմերին ուղղահայացներ  $MP$ -ն և  $MQ$ -ն:  $P$  և  $Q$  կետերից տարված են  $OB$ -ին և  $OA$ -ին ուղղահայացներ համապատասխանաբար  $PR$ -ը և  $QS$ -ը: Ապացուցեք, որ  $RS \perp OM$ :

482.  $ABCD$  ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերը հատվում են  $P$  կետում:

Ֆայտնի է, որ  $\angle ADP = \frac{1}{2} \angle PDC$ ,  $\angle ADP = \frac{2}{3} \angle PAD$  և  $AD = BD = CD$ :

ա) Գտեք քառանկյան բոլոր անկյունները: բ) Ապացուցեք, որ  $AB^2 = BP \cdot BD$ :

483. Ապացուցեք, որ եթե ուռուցիկ քառանկյան հանդիպակաց կողմերը զուգահեռ չեն, ապա նրանց կիսագումարը մեծ է մյուս երկու հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածից:

484. Ապացուցեք, որ եթե ուռուցիկ քառանկյան հանդիպակաց կողմերի միջնակետերի հեռավորությունների գումարը հավասար է նրա կիսապարագծին, ապա այդ քառանկյունը զուգահեռագիծ է:

485. Ապացուցեք, որ եթե ուռուցիկ քառանկյան երկու հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածը հավասար է մյուս երկու կողմերի կիսագումարին, ապա այդ քառանկյունը սեղան է կամ զուգահեռագիծ:

486.  $EFG$  եռանկյան կողմերը համապատասխանաբար հավասար են

$$\frac{S_{EFG}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4};$$

$ABC$  եռանկյան միջնագծերին: Ապացուցեք, որ

487. Կառուցեք հավասարասրուն եռանկյուն՝ ըստ սրունքների կազմած անկյան և հիմքի ու նրան տարված բարձրության գումարի:

### Շրջանագիծ

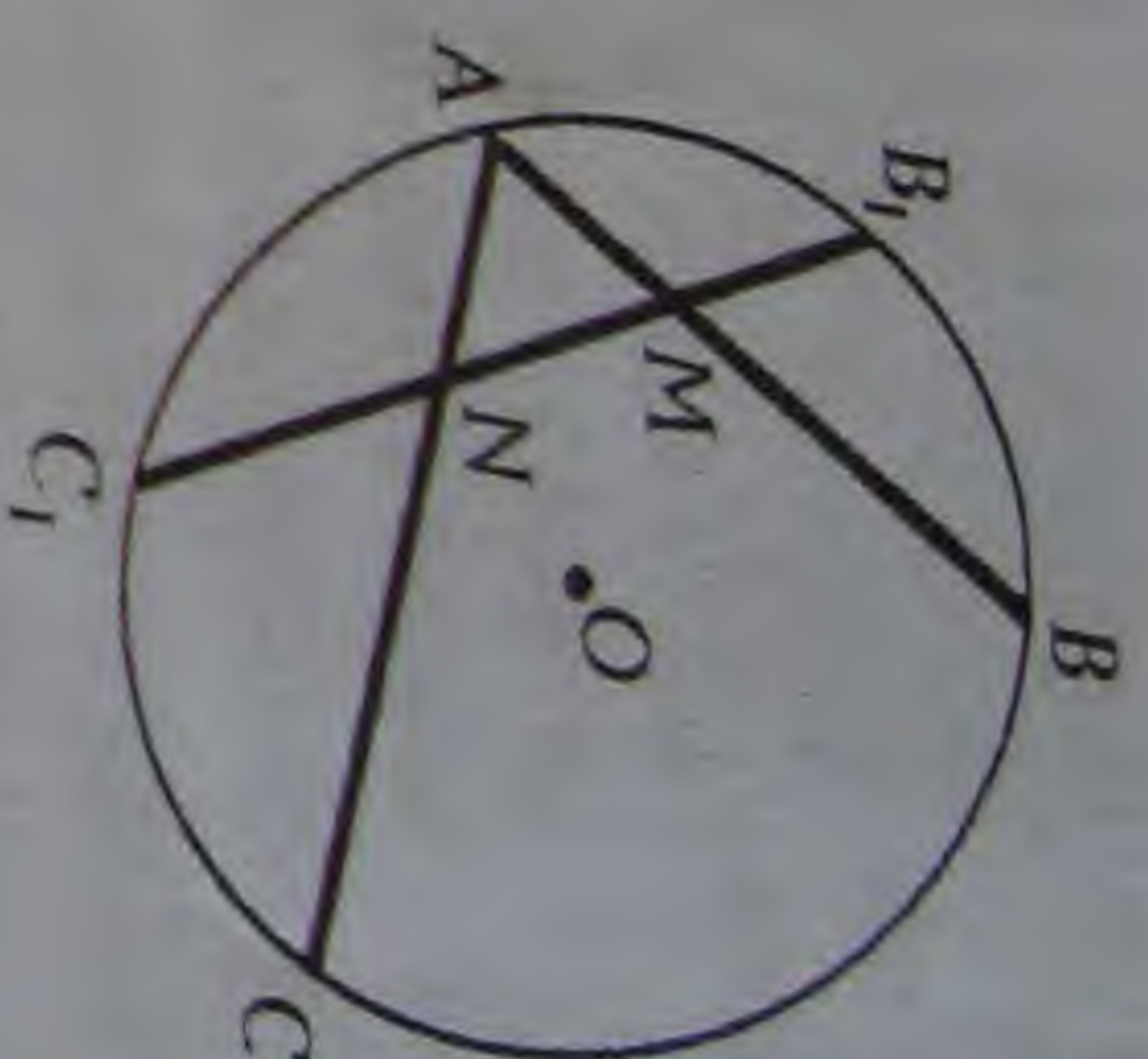
488. Երկու շրջանագծեր ունեն միակ ընդհանուր  $M$  կետ: Այդ կետով տարված են երկու հատողներ, որոնք շրջանագծերից մեկը հատում են  $A$  և  $A_1$  կետերում, իսկ մյուսը՝  $B$  և  $B_1$  կետերում: Ապացուցեք, որ  $AA_1 \parallel BB_1$ :



489.  $B_1$  և  $C_1$  կետերը  $AB$  և  $AC$  աղեղների միջնակետերն են (նկ. 97): Ապացուցեք, որ

$$AM = AN:$$

490.  $O_1$  և  $O_2$  կենտրոններով երկու շրջանագծերի հատման  $A$  կետով տարված է ուղիղ, որը շրջանագծերից մեկը հատում է  $B$ , իսկ մյուսը՝  $C$  կետում: Ապացուցեք, որ  $BC$  հատվածը մեծագույն կլինի այն դեպքում, երբ այն գուրգահեռ լինի  $O_1O_2$



Նկ. 97

ուղիղին:

491.  $AB$  հատվածը  $O$  կենտրոնով շրջանագծի տրամագիծ է: Շրջանագծի յուրաքանչյուր  $OM$  շառավիղի վրա  $O$  կետից տեղադրված է հատված, որի երկարությունը հավասար է  $M$  ծայրակետի և  $AB$  ուղղի միջև եղած հեռավորությանը: Գտեք այդ ձևով կառուցված հատվածների ծայրակետերի բազմությունը:

492. Դիցուք՝  $ABC$  եռանկյան բարձրություններն ընդգրկող ուղիղների հատման կետը  $H$ -ն է, իսկ  $A$ -ը,  $B$ -ը,  $C$ -ը կետեր են, որոնք  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  ուղիղների նկատմամբ համաչափ են  $H$  կետին: Ապացուցեք, որ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  կետերը գտնվում են  $ABC$  եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի վրա:

493.  $ABC$  եռանկյան  $B$  գագաթից տարված են  $BH$  բարձրությունը և  $B$  անկյան կիսորդը: Այդ կիսորդը  $E$  կետում հատում է եռանկյան արտագծյալ շրջանագիծը, որի կենտրոնը  $O$ -ն է: Ապացուցեք, որ  $BE$  ճառագայթը  $OBH$  անկյան կիսորդն է:

494.  $ABC$  հավասարակողմ եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի կամայական  $X$  կետը հատվածներով միացված է եռանկյան գագաթներին: Ապացուցեք, որ  $AX$ ,  $BX$  և  $CX$  հատվածներից մեկը հավասար է մյուս երկուսի գումարին:

495. Ապացուցեք, որ եթե ներգծյալ քառանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց են, ապա քառանկյան հանդիպակաց կողմերի քառակուսիների գումարը հավասար է արտագծված շրջանագծի տրամագծի քառակուսուն:

496. Կառուցեք տրված երկու շրջանագծերի ընդհանուր շոշափողը:

497. Տրված են  $O$  կենտրոնով շրջանագիծը,  $M$  կետը և  $P_1Q_1$ ,  $P_2Q_2$  հատվածները: Կառուցեք այնպիսի  $P$  ուղիղ, որ շրջանագիծը նրանից անջատի  $P_1Q_1$ -ին հավասար լար, և  $M$  կետի հեռավորությունը  $P$  ուղղից հավասար լինի  $P_2Q_2$ -ին:

498. Շրջանագծի ներսում տրված է մի կետ: Կառուցեք այդ կետով անցնող այն լարը, որն այդ կետով անցնող բոլոր լարերից փոքրագույնն է:



2. ա)  $540^\circ$ , բ)  $720^\circ$ , գ)  $1440^\circ$ : 3.  $90^\circ$ : 4.  $108^\circ$ : 5. 5: 6.  $100^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $60^\circ$ : 7.  $105^\circ$ ,  $95^\circ$ ,  $85^\circ$ : 8.  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $150^\circ$ : 9.  $40^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ : 10. ա) 2որս, բ) երեք, գ) վեց, դ) հինգ: 11. 23մմ, 20մմ, 19մմ, 18մմ: 12. 15սմ, 7սմ, 23սմ, 21սմ: 13.  $75^\circ$ : 16. ա) 10,5սմ, 13,5սմ, բ) 8,5սմ, 15,5սմ, գ) 8սմ, 16սմ: 17. 13սմ, 12սմ, 13սմ, 12սմ: 18.  $40^\circ$ ,  $140^\circ$ : 19. 10սմ: 22.  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ : 23.  $50^\circ$ ,  $130^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $130^\circ$ : 24. 78սմ: 25. 56սմ կամ 70սմ: 26. ա)  $\angle B = \angle D = 96^\circ$ ,  $\angle C = 84^\circ$ , բ)  $\angle A = \angle C = 117^\circ 30'$ ,  $\angle B = \angle D = 62^\circ 30'$ , գ)  $\angle A = \angle C = 71^\circ$ ,  $\angle B = \angle D = 109^\circ$ , դ)  $\angle A = \angle C = 120^\circ$ ,  $\angle B = \angle D = 60^\circ$ , ե)  $\angle A = \angle C = 53^\circ$ ,  $\angle B = \angle D = 127^\circ$ : 27.  $MN = PQ = 6$ սմ,  $NP = QM = 8$ սմ,  $\angle M = \angle P = 60^\circ$ ,  $\angle N = \angle Q = 120^\circ$ : 29. Ցուցում: Սկզբում ապացուցել, որ  $BK = DM$ : 30. Ցուցում: Օգտվել կետ 5-ի  $2^\circ$  հայտանիշից: 31. Ցուցում: Օգտվել կետ 5-ի  $3^\circ$  հայտանիշից: 32. Ցուցում: Օգտվել կետ 5-ի  $2^\circ$  հայտանիշից: 33. 12սմ: 36. 6մ, 8մ: 37.  $m+n$ : 40. 2մ: 41.  $70^\circ$ ,  $110^\circ$ ,  $110^\circ$ ,  $70^\circ$ : 42. 8սմ, 12սմ: 43. 16սմ: 44. 24սմ, 30սմ: 45. 3սմ, 4սմ: 46. 2սմ: 49. 20սմ: 50. ա) 6սմ, բ) 5սմ: 54. 20սմ, 20սմ: 55. ա) 198,1սմ, կամ 122,6սմ, բ) 23,4դմ կամ 19,8դմ: 57. 18սմ: 59.  $40^\circ$ : 60.  $75^\circ$ : 61. 40սմ: 62. 60սմ: 63. ա)  $60^\circ$  և  $120^\circ$ , բ)  $30^\circ$  և  $60^\circ$ : 64. 42սմ: 65.  $22^\circ 30'$  և  $67^\circ 30'$ : 67. 10սմ: 68. 10սմ: 69. 40սմ: 70. 10սմ: 72. ա) Ոչ, բ) Ոչ, գ) այո: 74. ա) Երկու, բ) անվերջ բազմություն: Երկուսն էլ ուղղահայաց ցանկացած ուղիղ, ինչպես նաև այդ ուղիղը, գ) մեկ: 78. ա) Այո, բ) Ոչ, գ) այո, դ) այո: 83. Երեք: 91. 18, 12, 8: 92. ա) Ոչ, բ) Ոչ, գ) այո: 93. ա) Այո, բ) այո, գ) այո: 94. ա) Վեցանյութ, բ) յոթանյութ, գ) յոթանյութ: 95. 4սմ: 96. 96սմ: 97. 6: 98. 8: 2-ը վեցանյութ բուրգ, 6-ը բառանյութ բուրգ: 99. 16, 9, 9: 100. ա) Տասներկու անյութ բուրգ, բ) իննանյութ բուրգ, գ) վեցանյութ բուրգ: 101. ա) Այո, բ) Ոչ: 102. 16սմ: 105. Հատում է  $CD$  կողմը, 9սմ և 5սմ: 106. 3սմ, 4սմ, 3սմ: 108. Ցուցում: Օգտվել 52 խնդրից: 109. Ցուցում: Օգտվել ուռուցիկ բառանյութ անյութների գումարի վերաբերյալ թեորեմից և 15, բ) խնդրից: 111. Ցուցում:  $M$  կետով տանել  $BK$  ուղիղն զուգահեռ ուղիղ և խնդրից: 112. Ցուցում: Օգտվել  $\triangle BMD = \triangle BMD$ : 115. Ցուցում: 113. Ցուցում: Սկզբում ապացուցել, որ  $\triangle BMD = \triangle BMD$ : 116. 36,8սմ: 117. Օգտվել եռանկյան միջին գծի հատկությունից: 118. 8սմ: 119. Սկզբում, որ  $AMC$  և  $ANC$  եռանկյունները հավասարաբար ունենան: 120. 8սմ: 121. Ցուցում: Սկզբում ապացուցել, որ  $\triangle ABH = \triangle AMH$ : 122. 8սմ: 123. Ցուցում: Փոքր հիպոթենուսի միջնակետով տանել սրունքների զուգահեռներ



և օգտվել. «Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնածիզին տարված միջնագիծը հավասար է ներքնածիզի կեսին» անդումից: **121.** Անվերջ բազմությամբ: **122\*.** Ցուցում: Պիցուր՝  $a$ -ն և  $b$ -ն պատկերի համաչափության երկու փոխուղղահայաց առանցքներն են, և  $O$ -ն դրանց փության երկու փոխուղղահայաց առանցքներն են, որ երբեք  $M$  և  $M_1$  կետերը հատման կետը: Սկզբում ապացուցել, որ երբեք  $M_1$  և  $M_2$  կետերը  $b$  ուղղի համաչափ են  $a$  ուղղի նկատմամբ, իսկ  $M_1$  և  $M_2$  կետերը  $b$  ուղղի նկատմամբ, ապա  $M_1$ -ը և  $M_2$ -ը համաչափ են  $O$  կետի նկատմամբ:

## Գ Լ Ո Ւ Խ VII

**131.**  $90^\circ$ : **132.** 8սն: **134.**  $30^\circ$ : **138.** ա)  $r=5$ , բ)  $r<5$ , գ)  $r>5$ : **139.** ա) 3, բ) 3-ից մեծ: **140.** 29սն: **142.**  $30^\circ$ : **143.**  $30^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $120^\circ$ : **144.** Ցուցում: Սկզբում ապացուցել, որ  $\angle ADC=30^\circ$ : **145.**  $\angle A=30^\circ$ ,  $\angle O=60^\circ$ ,  $\angle B=90^\circ$ : **146.**  $60^\circ$ : **147.**  $60^\circ$ : **152.** ա) Ցուցում: ա) Սկզբում կաշուցեք շրջանագծի կենտրոնով անցնող և տրված ուղղին ուղղահայաց ուղիղ: բ)  $O$  կենտրոնով տանել ուղղին զուգահեռ: **154.** ա) 16սն, բ) 32սն: **156.** 12սն: **158.** ա)  $64^\circ$ , բ)  $175^\circ$ , գ)  $34^\circ$ , դ)  $105^\circ$ : **159.**  $60^\circ$  և  $30^\circ$  կամ  $140^\circ$  և  $110^\circ$ : **160.**  $101^\circ$  կամ  $36^\circ$ : **162.**  $50^\circ$ : **163.**  $73^\circ$ : **164.**  $98^\circ$ : **165.** 12սն: **166.** 10սն: **167.**  $100^\circ$ : **168.**  $20^\circ$ : **169.**  $62^\circ$ : **170.**  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ : **171.**  $20^\circ 20'$ ,  $34^\circ 50'$ : **173.**  $36^\circ$ : **174.**  $44^\circ$ : **176.** Ցուցում: Օգտվել 175 խնդրից: **180.** Ցուցում: Նախ ապացուցել, որ  $\angle AOB$  եռանկյունը հավասարասրուն է: **182.** 10սն: **184.** ա)  $46^\circ$  և  $46^\circ$ , բ)  $21^\circ$  և  $21^\circ$ : **185.** ա)  $AD=3,5$ սն,  $CD=5$ սն, բ)  $AC=14,6$ սն: **187.** 9սն: **189.** Ցուցում: Օգտվել հակասող ենթադրության մեթոդից: **193.** Ցուցում: Օգտվել հատվածի միջնուղղահայացի վերաբերյալ թեորեմից: **194.** Ցուցում: Հաշվի առնել, որ որոնելի կետը գտնվում է տրված անկյան կիստրոփի և տրված հատվածի միջնուղղահայացի վրա: **199.** 20սն: **200.** 2սն: **202.** 2սն: **203.** 3սն: **204.**  $130^\circ$ : **205.**  $a$ : **206.** 20սն: **207.** 32սն: **208.** 4սն, 16սն, 10սն, 10սն: **209.** 15սն: **210.** 2սն: **214.** ա)  $\angle A=67^\circ$ ,  $\angle B=23^\circ$ ,  $\angle C=90^\circ$ , բ)  $\angle A=55^\circ$ ,  $\angle B=35^\circ$ ,  $\angle C=90^\circ$ : **215.**  $\angle A=51^\circ$ ,  $\angle B=\angle C=64^\circ 30'$ : **219.** Ցուցում: Օգտվել 47 ա) խնդրից: **220.**  $\angle C=76^\circ$ ,  $\angle D=109^\circ$ : **221.** ա) Ոչ, բ) այո, գ) այո, դ) այո: **231.** 2:1: **232.** 5սն: **233.** 12սն: **236.** 30սն: **237.** 6սն, 12սն: **238.** 10սն: **241.** Ջուրը լցված է կեսի չափով: **242.** 6սն: **243.** ա) Ընդհանուր կետ չունեն, բ) ունեն ընդհանուր կետեր, գ) ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ, դ) ունեն ընդհանուր կետեր, ե) ընդհանուր կետ չունեն: **245.** Ցուցում: Օգտվել 176 խնդրից: **246.** Ցուցում: Նկատի ունենալ, որ  $BM=MX$  և  $CN=NX$ : **247\*.** Պիցուր՝  $K$ -ն  $M$  կետով անցնող ընդհանուր շոշափողի և  $AB$  ուղղի հատման կետն է: Սկզբում ապացուցել, որ  $KA=KM=KB$ : **253.** Ոչ: **257.** Ցուցում: Օգտագործել այն կողմի միջնուղղահայացը, որին տարված է միջնագիծը: **259.** Ցուցում:



Օգտվել ենրգծված քառանկյան անկյունների հատկությունից:  
**261.** Ցուցում: Օգտվել 260 խնդրից: **262.** Ցուցում: Օգտվել 260 խնդրից: **263.** Ցուցում: Սկզբում ապացուցել, որ  $MHBC$  քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ: **264.** Ցուցում: Օգտվել 254 խնդրից: **265.** Ցուցում: Նախ կառուցել  $AB$  հատվածին միջնուղղահայաց և ապա  $A$  կետով  $a$  ուղիղն ուղղահայաց:

### Գ Լ ՈՒ Խ VIII

- 269.** Ցուցում: Դիցուք  $O$ -ն  $AM$  և  $BC$  հատվածների հատման կետն է: Սկզբում ապացուցել  $ABO$  և  $MCO$  եռանկյունների հավասարությունը: **270.** Ցուցում:  $BC$  ուղիղն տանել  $EF$  ուղղահայացը: Սկզբում ապացուցել  $ABM$  և  $EFM$ ,  $DCN$  և  $EFN$  եռանկյունների հավասարությունը: **271.** ա)  $1,44սմ^2$ , բ)  $\frac{9}{16}$  դմ<sup>2</sup>, գ)  $11\frac{1}{9}$  մ<sup>2</sup>: **272.** ա) 4սմ, բ) 5դմ, գ) 1,5մ: **273.** ա)  $2400մմ^2$ , բ)  $0,24դմ^2$ : **274.** ա) Կմեծանա 9 անգամ, բ) կփոքրանա 4 անգամ: **275.** 6 անգամ: **276.** ա)  $27,2սմ^2$ , բ)  $\frac{4}{5}$  սմ<sup>2</sup>, գ)  $21,375սմ$ , դ) 27սմ: **277.** ա) Կմեծանա երկու անգամ, բ) կմեծանա չորս անգամ, գ) չի փոփոխվի: **278.** 48սմ<sup>2</sup>: **279.** 40սմ: **280.**  $1\frac{19}{45}$  սմ: **281.**  $100սմ^2$ : **282.** 60սմ<sup>2</sup>: **283.** 98սմ<sup>2</sup>: **284.** 2200: **285.** 360: **286.** Քառակուսու ծև ունեցող հողամասի մակերեսը մեծ է  $25մ^2$ : **287.** ա)  $180սմ^2$ , բ) 4սմ, գ) 18սմ, դ)  $a=42$ : **288.**  $156սմ^2$ : **289.**  $78սմ^2$ : **290.**  $18սմ^2$ : **291.**  $56,7սմ^2$ : **292.** ա) 10սմ, բ) 4սմ, գ) 12սմ և 9սմ: **293.**  $12սմ^2$ : **294.**  $30^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $150^\circ$ : **295.**  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ : **296.** 20սմ<sup>2</sup>: **297.**  $77սմ^2$ : **298.** 80սմ: **299.**  $115,52սմ^2$ : **300.** Քառակուսու մակերեսը մեծ է: **301.** Ուղղանկյան մակերեսը մեծ է: **302.** ա)  $38,5սմ^2$ , բ) 5,4սմ, գ) 4սմ: **303.** 8սմ: **304.**  $5,625սմ$ : **305.** ա)  $22սմ^2$ , բ)  $1,8դմ^2$ : **306.**  $98սմ^2$ : **307.** 1:2: **308.** 8սմ<sup>2</sup>: **309.**  $25սմ^2$ : **310.** 24սմ<sup>2</sup>: **311.** Եռանկյունների մակերեսները հավասար են: **312.** 3:2: **313.** 6:1: **314.** Ցուցում: Սկզբում  $BC$  կողմը բաժանել չորս հավասար մասերի: **315.** ա)  $224սմ^2$ , բ) 4,6դմ: **316.** 54մ: **317.** 8: **318.** ա)  $133սմ^2$ , բ)  $24սմ^2$ , գ)  $72սմ^2$ : **319.**  $54սմ^2$ : **320.** 5սմ: **321.** 4սմ: **322.**  $54սմ^2$ : **323.**  $4,76սմ^2$ : **324.** 24սմ<sup>2</sup>: **325.** ա)  $26,46սմ^2$ , բ)  $73,5մ^2$ : **326.** ա) 4սմ<sup>2</sup>, բ)  $25դմ^2$ : **327.** ա) 16 անգամ, բ) 4 անգամ: **328.** Մեծագույնը: **329.** ա)  $42սմ^2$ , բ)  $208սմ^2$ , գ)  $292սմ^2$ : **330.**  $132սմ^2$ ,  $204սմ^2$ : **331.** 3,5սմ,  $240սմ^2$ : **332.**  $48սմ^2$ : **333.** 10սմ: **335.** ա)  $24մ^2$ ,  $60մ^2$ : **336.** 6: **337.** 8000: **338.**  $7սմ \times 42սմ$ , կամ  $14սմ \times 21սմ$ : **339.** ա) 10, բ) 13, գ) 13:



q)  $\frac{5}{7}$ , η) 2: 340. ա) 5, բ) 12, գ) 1, η)  $2\sqrt{3}$ : 341.  $\frac{c\sqrt{3}}{2}$ : 342. ա) 12.

բ) 2, գ) 8: 343. 15սմ: 344. ա)  $3\sqrt{3}$  սմ, բ)  $\frac{8\sqrt{3}}{3}$  սմ: 345.  $10\sqrt{2}$  սմ:

346. ա)  $4\sqrt{3}$  սմ<sup>2</sup>, բ)  $0,36\sqrt{3}$  սմ<sup>2</sup>, գ)  $2\sqrt{3}$  սմ<sup>2</sup>: 347. ա) 10սմ և 48սմ<sup>2</sup>,

բ)  $6\sqrt{3}$  սմ և  $27\sqrt{3}$  սմ<sup>2</sup>, գ)  $7\sqrt{2}$  սմ և 49սմ<sup>2</sup>: 348. ա)  $4\frac{8}{13}$ , բ) 9,6: 349. 8սմ,

9,6սմ, 9,6սմ: 350. 13սմ և 120սմ<sup>2</sup>: 351. 96սմ<sup>2</sup> և 16սմ: 352. ա) 180սմ<sup>2</sup>,

բ)  $48\sqrt{3}$  սմ<sup>2</sup>, գ) 135սմ<sup>2</sup>: 353. 162սմ<sup>2</sup>: 354.  $\sqrt{7}$ : 355. 5սմ: 356. ա) Այո,

բ) ոչ, գ) այո, η) այո, է) ոչ, գ) ոչ, է) այո: 357. ա) 6,72սմ, բ)  $7\frac{1}{17}$  սմ:

358. 25սմ: 359. ա) 45°, 45°, 90°, բ) 30°, 60°, 90°: 360. 300սմ<sup>2</sup>:

361. 105°: 363. ա) 270000սմ<sup>2</sup>, բ) 0,27կմ<sup>2</sup>: 364.  $46\frac{2}{3}$  սմ<sup>2</sup>: 365. 20սմ:

366. 900սմ<sup>2</sup>: 367. Ցուցում: Օգտվել այն բանից, որ ուղղահայացը փոքր է թեքից: 368. Ցուցում: ABCD քառակուսու BC և DC կողմերի

վրա վերցնել M և N կետերն այնպես, որ  $BM = \frac{2}{3}BC$ ,  $DN = \frac{2}{3}DC$ , և

տանել AM և AN ուղիղները: 369. Ոչ: Ցուցում: Համեմատել, օրինակ

13, 13, 24 և 12, 12, 12 կողմերով եռանկյունների մակերեսները: 370\*.

Ցուցում: Միացնել հիմքի վրա գտնվող կետը հիմքին հանդիպակաց գագաթին, և օգտվել այն բանից, որ ստացված երկու եռանկյունների

մակերեսների գումարը հավասար է տրված եռանկյան մակերեսին:

371. Ցուցում: Խնդիրը լուծվում է 370\* խնդրին համանման: 372. Ցուցում: Ապացուցել, որ յուրաքանչյուր եռանկյան մակերեսը հավասար է AEEDF զուգահեռագծի մակերեսի կեսին: 373. ա) և բ) եռանկյունների

մակերեսները հավասար են: գ) Ցուցում: Օգտվել բ) խնդրից և 38

կետի 2-րդ թեորեմից: 374. 60մ, 14,4մ: 375.  $10\frac{10}{17}$  սմ: 376. ա)

$100\sqrt{3}$  սմ<sup>2</sup>, բ) 18սմ<sup>2</sup>: 377. 320սմ<sup>2</sup>: 378. 84սմ<sup>2</sup>: Ցուցում: Սկզբում

ապացուցել, որ ABC-ն և ACD-ն ուղղանկյուն եռանկյուններ են:

379. ա) 243սմ<sup>2</sup>, բ) 529սմ<sup>2</sup>: 380.  $h^2$ : 381.  $a^2$ : 383. 48սմ<sup>2</sup>: 384.

$(\sqrt{2}-1)a^2$ : 385.  $3a^2$ : 386.  $4\sqrt{3}a^2$ : 387.  $22a^2$ : 389. 2,61: 390. 5,53դմ<sup>2</sup>:

391. ա) 3,34սմ, բ) 3,3սմ: 392. 3,40մ: 393\*. ա) Այո,  $S=(4\pm 1)$ սմ<sup>2</sup>, բ) այո,

$S=(8\pm 1)$ սմ<sup>2</sup>, գ) ոչ, բանի որ  $39,05սմ^2 \leq S \leq 41,61սմ^2$ : 394. 8,13սմ: 395.

ա) 106սմ, բ) 105,6սմ: 396\*. ա) Ոչ, բանի որ  $5,80սմ \leq c \leq 6,08սմ$ , բ) այո,

$c=(5,9\pm 0,2)$ սմ:



397.  $\frac{3}{4}$ , ոչ: 398. ա) Այո, բ) այո, գ) ոչ: 399. 6,25սմ: 400. 5դմ:

401. 60սմ: 403. 30սմ: 404. Այո: 405. 8,4սմ, 10,5սմ, 14,7սմ:

406.  $\angle T = 20^\circ$ ,  $\angle K = 40^\circ$ ,  $\angle P = \angle M = 120^\circ$ : 407. 22,5սմ: 408.  $6\text{սմ}^2$ ,  $13,5\text{սմ}^2$ :

409.  $11\frac{3}{7}$  սմ: 412.  $x=9$ ,  $y=21$ : 413.  $BC=4,8$ ,  $DF=1,6$ ,  $DE=1,1$ : 415.  $AB$  և

$DE$  ուղիղները զուգահեռ են: 417. ա)  $EF=5\text{սմ}$ ,  $FC=3,5\text{սմ}$ , բ)  $DE=5\frac{5}{7}$  սմ,

$EC=2\frac{2}{7}$  սմ: 419. ա) 10սմ, բ)  $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{a}{b}$ , գ) 12սմ: 420. ա) Ոչ միշտ,

բ) այո, գ) այո: 422. ա) Այո, բ) ոչ: 424. 4սմ: 425. ա) 14սմ, բ) 6դմ:

426. 6սմ և 6,5սմ: 427. ա) 5սմ, 5սմ, 7,5սմ, բ) բոլոր չորս

կողմերը հավասար են  $\frac{ab}{a+b}$ : 428.  $BC=1,2\text{սմ}$ ,  $AD=3,6\text{սմ}$ : 430. ա)

17,5սմ, բ)  $BD=5\text{սմ}$ ,  $DE=6\text{սմ}$ , գ) 8սմ: 431. Ցուցում: Եթե  $a$  և  $b$  ուղիղները

զուգահեռ չեն, ապա  $A$  կետով տանել  $b$  ուղիղն զուգահեռ ուղիղ: 432.

Այո: 433. ա) Այո, բ) այո: 435. ա) 12սմ, բ) 6սմ, գ) 3սմ: 436. 7,5սմ, 9սմ,

10,5սմ: 438.  $A_1B_1=4,5\text{սմ}$ ,  $B_1C_1=6,75\text{սմ}$ : 440. 16,8սմ, 14սմ,  $7\frac{7}{9}$  սմ:

442. Ցուցում: Սկզբում ապացուցել, որ ա)  $\triangle ABM \sim \triangle A_1B_1M_1$ ,

բ)  $\triangle ABH \sim \triangle A_1B_1H_1$ : 447.  $288\text{սմ}^2$ : 448. 3սմ:

### ԴԺՎԱՐԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ Քառանկյուններ

450. Ցուցում: Մեկ ընդ մեջ վեցանկյան կողմերը շարունակելով ստանալ հավասարակողմ եռանկյուն: 451. Ցուցում: Սկզբում ապացուցել, որ  $a_1+a_2+a_3=a_3+a_4+a_5=a_5+a_6+a_1$ : Այնուհետև կառուցել հավասարակողմ եռանկյուն, որի կողմը հավասար է  $a_1+a_2+a_3$ , և օգտվել 450 խնդրից: 452. Ցուցում: Դիտարկել ինչպես ուռուցիկ, այնպես էլ ոչ ուռուցիկ քառանկյունների դեպքերը. նրանցից չորս փայտասալիկով պատրաստել նոր սալիկ: 453. Ցուցում: Դիցուք  $ABCD$ -ն ուռուցիկ քառանկյուն է: Նկատի ունենալ, որ  $C$  գագաթը գտնվում է  $BAD$  անկյան ներսում, այդ իսկ պատճառով  $AC$  ճառագայթն անցնում է այդ անկյան միջով և, հետևաբար, հատում է  $BD$  ճառագայթը: Նմանապես դիտարկել  $BD$  ճառագայթը և  $ABC$  անկյունը: 454. Ցուցում: Եթե  $ABCD$  քառանկյունը ուռուցիկ է, ապա օգտվել 453 խնդրից: Եթե  $ABCD$ -ն ուռուցիկ չէ, և օրինակ  $AB$  ուղիղը հատում է  $CD$  կողմը  $M$



կետում, ապա դիտարկել երկու դեպք.  $A$ -ն  $MB$  հատվածի կետ է, և  $B$ -ն  $AM$  հատվածի կետ է: **455.**  $\frac{3}{4}$ : Ցուցում: Պիցուր  $P$ -ն  $DE$  և  $AB$  ուղիղների հատման կետն է,  $DO \parallel AC$  և  $O \in AB$ : Սկզբուն ապացուցել, որ  $APE$ -ն,  $AOD$ -ն և  $POD$ -ն հավասարապուրոն եռանկյուններ են: **456.** Ցուցում: Սկզբուն ապացուցել  $m_a < \frac{b+c}{2}$  և  $m_a > \frac{a+b-c}{2}$  անհավասարությունները, որտեղ  $a$ -ն,  $b$ -ն,  $c$ -ն եռանկյան կողմերն են,  $m_a$ -ն  $a$  կողմին տարված միջնագիծը: **457.** Ցուցում: Սկզբուն ապացուցել, որ տրված քանակյան անկյունագծերը հատման կետով կիսվում են: **458.** Տրված ուղղին զուգահեռ ուղիղ: **459.** Ցուցում: Փոքր հիմքի միջնակետով տանել սրունքներին զուգահեռ ուղիղներ: **460.** Ցուցում: Նկատել, որ կիսորդների հատման կետերը ուղղանկյան գագաթներին միացնող հատվածներով ստացվում են ուղղանկյուն եռանկյուններ: **461.** Ցուցում: Պիցուր  $O_1$ -ը,  $O_2$ -ը,  $O_3$ -ը,  $O_4$ -ը  $ABCD$  զուգահեռագծի  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  և  $DA$  կողմերի վրա կառուցված քառակուսիների անկյունագծերի հատման կետերն են: Սկզբուն ապացուցել  $AO_1O_4$ ,  $BO_1O_2$ ,  $CO_2O_3$ ,  $DO_3O_4$  եռանկյունների հավասարությունը: **462.** Ցուցում:  $AB$  ճառագայթի վրա անջատել  $AM$  հատվածին հավասար  $AN$  հատվածը, տանել  $MN$  հատվածը և  $AMN$  եռանկյան  $NS$  բարձրությունը: Այնուհետև ապացուցել, որ  $\Delta ANS = \Delta MAD$  և  $\Delta AKB = \Delta NMS$ : **463.**  $90^\circ$ : Ցուցում: Պիցուր  $D_1$  կետը համաչափ է  $D$  կետին  $E$  կետի նկատմամբ: Սկզբուն ապացուցել, որ  $\Delta ACD_1$ -ը հավասարապուրոն ուղղանկյուն եռանկյուն է: **464.**  $30^\circ$ : Ցուցում:  $AM$  ճառագայթի վրա անջատել  $AK = AB$  հատվածը և, դիտարկելով  $BKC$  եռանկյունը, ապացուցել, որ  $K$  կետը համընկնում է  $M$  կետին: **465.** Ցուցում: Նախ ապացուցել, որ  $\Delta BKP = \Delta ABC = \Delta CQT$ : **466.** Ցուցում: Նախ կառուցել հավասարապուրոն եռանկյուն, որի հիմքը հավասար է սեղանի հիմքերի գումարին, իսկ սրունքը՝ սեղանի անկյունագծին: **467.** ա) Ցուցում: Նախ ապացուցել, որ համաչափության առանցքը հատում է եռանկյան կողմերից մեկը:

### Մ ա կ ե ռ ն ս ն ը

**468.** Ցուցում: Օգտվել  $ABC$  և  $ADC$ ,  $APM$  և  $ATM$ ,  $MQC$  և  $MRC$  եռանկյունների հավասարությունից: Հակադարձ պնդումն ապացուցելու համար ենթադրել, որ  $M$  կետը գտնվում է  $AC$ -ի վրա և ապացուցել, որ այդ դեպքում զուգահեռագծերի մակերեսները հավասար չեն: **469.**  $\frac{1}{5}$ : **470.** Ցուցում: Պիցուր  $MN$ -ը  $CD$  կողմի



միջնակետով AB-ին տարված ուղղահայացն է, իսկ MP-ն միջին գիծը: B կետով տանել AD-ին ուղղահայաց և դիտարկել MP և AB ներքնաձիգներով եռանկյունների նմանությունը: **471.** Ցուցում: Նախ ապացուցել, որ զուգահեռագծի մակերեսը, որի կողմը սեղանի փոքր հիմքն է, հավասար է այն երկու եռանկյունների մակերեսների գումարին, որոնք հարակից են այդ հիմքին և սեղանի սրունքներին: **472.** Ցուցում: Նախ ապացուցել, որ  $S_{ABD}=S_{EDC}$  և  $S_{BDK}=S_{CDK}$ : **473.** Ցուցում: Ապա-

ցուցել, որ  $S_{AKCM}=S_{KBMD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$ : **474.**  $2\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$ : Ցուցում: Դիցուք

AB-ն և AD-ն տրված անկյան կողմերը պարունակող ուղիղներին ուղղահայացներն են, իսկ C-ն AB և OD ուղիղների հատման կետն է:

Դիտարկել ADC և OBC ուղղանկյուն եռանկյունները: **475.**  $\frac{\alpha}{2}$ : Ցուցում:

Նախ ապացուցել, որ DCK և DCM եռանկյունների մակերեսները հավասար են, որից կհետևի  $KM \parallel DC$  և  $\angle BKM = \angle BDC$ : **476.**  $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$ :

Ցուցում: M կետով տանել ուղղանկյան կողմերին զուգահեռ ուղիղներ և դիտարկել առաջացած ուղղանկյուն եռանկյունները: **477.** Ցուցում:

Դիցուք  $AB=c$ ,  $BC=a$ ,  $BD=h$ : Օգտագործելով Պյութագորասի թեորեմը ապացուցել, որ  $MB=\sqrt{a^2+c^2-h^2}$  և  $KB=\sqrt{a^2+c^2-h^2}$ : **478.** Ցուցում: AC և CB կողմերին տանել OM և ON ուղղահայացները և ապացուցել, որ

$OM=\frac{1}{3}CB$ ,  $ON=\frac{1}{3}AC$ : Այնուհետև օգտվել Պյութագորասի թեորեմից

AOM, BON և COM եռանկյունների համար:

Ն մ ա ն եռանկյունը

**479.** Ցուցում: ա) Ցույց տալ, որ  $\angle AEF = \angle ADE$ : բ) Նախ ապացուցել, որ  $DF=DE$  և  $AF=FE$ : Այնուհետև օգտվել AED և AFE եռանկյունների նմանությունից: **480.**  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ : Ցուցում: Դիցուք ABC-ն տրված եռանկյունն

է, իսկ D-ն այն քառակուսու անկյունագծերի հատման կետն է, որը կառուցված է BC ներքնաձիգի վրա: CA ճառագայթի շարունակության վրա նշել E կետն այնպես, որ  $AE=CB$ , և E-ն միացնել D կետին: Ցույց տալ, որ  $\triangle EAD = \triangle DCB$ : **481.** Ցուցում: Դիցուք E և F կետերը MP-ի և MQ-ի, OB-ի և OA-ի հետ հատման կետերն են: Օգտվել OPR և OFQ, OQS և OEP եռանկյունների նմանությունից OEF և ORS եռանկյունների նմանությունը ապացուցելու համար: **482.** ա)  $\angle A=75^\circ$ ,



$\angle B=135^\circ$ ,  $\angle C=60^\circ$ ,  $\angle D=90^\circ$ : Բ) Ցուցում: Լկատի ունենալ, որ  $ABP$  և  $DAB$  եռանկյունները նման են: **483.** Ցուցում: Դիցուք  $MN$ -ը տրված  $ABCD$  ուռուցիկ բառանկյան  $AD$  և  $BC$  կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածն է: Լշել  $N$  կետի նկատմամբ  $D$  կետի համաչափ  $D_1$  կետը և դիտարկել  $ABD_1$  եռանկյունը: **484.** Ցուցում: Օգտվել **483** խնդրից: **485.** Ցուցում: Օգտվել **483** խնդրից: **486.** Ցուցում:  $ABC$  եռանկյան միջնագծերից մեկի ծայրակետերից տանել մյուս միջնագծերին զուգահեռներ և օգտվել այն բանից, որ առաջացած եռանկյունը հավասար է  $EFG$  եռանկյանը: **487.** Ցուցում: Լախ կառուցել որևէ հավասարապուր յոթանկյուն՝ ըստ տրված անկյան, ապա հիմքի շարունակության վրա տեղադրել բարձրությունը և ստացված կետը միացնել հիմքի հանդիպակաց գագաթին. օգտվել նմանության մեթոդից:

## Շ ը ջ ա ն ա գ ի ծ

**488.** Ցուցում: Օգտագործել տրված շրջանագծերի  $M$  կետով տարված ընդհանուր շոշափողը: **490.** Ցուցում:  $O_1$  և  $O_2$  կետերից  $BC$  ուղղին տանել  $O_1H_1$  և  $O_2H_2$  ուղղահայացները և  $O_1H_1$  ու  $O_2H_2$  զուգահեռ ուղիղների միջև եղած հեռավորությունը համեմատել  $O_1O_2$  հատվածի երկարության հետ: **491.** Դիցուք՝  $CD$ -ն շրջանագծի  $AB$  տրանագծին ուղղահայաց տրանագիծ է: Որոնքի կետերի բազմությունը բաղկացած է  $OC$  և  $OD$  հատվածների՝ որպես տրանագծերի վրա կառուցված երկու շրջանագծերից: **492.** Ցուցում:  $A$  կետը արտագծյալ շրջանագծի վրա գտնվելը ապացուցելու համար նախ հիմնավորել՝  $\angle A CB = \angle BAA$ : **493.** Ցուցում: Լախ ապացուցել, որ  $OE$ -ն  $AC$  հատվածի միջնուղղահայացն է: **494.** Ցուցում: Դիցուք  $XC > XA$  և  $XC > XB$ :  $XC$  հատվածի վրա տեղադրել  $XA$  հատվածին հավասար  $XD$  հատվածը: Յաշվի արձեղ, որ  $\angle AXC = 60^\circ$ , և ապացուցել  $AXB$  և  $ADC$  եռանկյունների հավասարությունը: **495.** Ցուցում: Դիցուք՝  $ABCD$ -ն տրված քառանկյունն է: Տանել  $BB_1$  տրանագիծը և նախ ապացուցել, որ  $AB_1 = CD$ : **497.** Ցուցում: Լախ կառուցել  $P_2Q_2$  շառավիղով ու  $M$  կենտրոնով և  $O$  կենտրոնով  $OA$  շառավիղով երկու շրջանագիծ, որտեղ  $A$ -ն՝ տրված շրջանագծի  $P_1Q_1$  հատվածին հավասար որևէ լարի միջնակետն է: Այնուհետև օգտվել **496** խնդրից: **498.** Ցուցում: Լախ ապացուցել, որ փոքրագույնը այն լարն է, որն ուղղահայաց է տրված կետով անցնող տրանագծին:



# ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԼՈՒԽ VI  
ՔԱՌԱՄԱԿՅՈՒՆՆԵՐ

|  |    |
|--|----|
| 18 §1 Բազմանկյուններ                           | 3  |
| 1. Բազմանկյուն                                 | 3  |
| 2. Ուռուցիկ բազմանկյուն                        | 4  |
| 3. Քառանկյուն                                  | 5  |
| Հարցեր և խնդիրներ                              | 5  |
| 19 §2 Ձուգահեռագիծ                             | 6  |
| 4. Ձուգահեռագիծ                                | 6  |
| 5. Ձուգահեռագծի հայտանիշները                   | 7  |
| Խնդիրներ                                       | 9  |
| 20 §3 Թալեսի թեորեմը: Սեղան                    | 10 |
| 6. Եռանկյան միջին գիծը                         | 10 |
| 7. Թալեսի թեորեմը                              | 11 |
| 8. Սեղան                                       | 13 |
| Խնդիրներ                                       | 14 |
| 21 §4 Ուղղանկյուն, շեղանկյուն, քառակուսի       | 15 |
| 9. Ուղղանկյուն                                 | 15 |
| 10. Շեղանկյուն և քառակուսի                     | 16 |
| 11. Առանցքային և կենտրոնային համաչափություններ | 17 |
| Հարցեր և խնդիրներ                              | 20 |
| Կառուցման խնդիրների լուծումը                   | 22 |
| Կառուցման խնդիրներ                             | 24 |
| 22 §5 Պատկերացում բազմանիստերի մասին           | 25 |
| 12. Տարածական պատկերներ                        | 25 |
| 13. Ձուգահեռանիստ                              | 26 |
| 14. Ուղղանկյունանիստ և խորանարդ                | 27 |
| 15. Պրիզմա (հատվածակողմ)                       | 27 |
| 16. Բուրգ                                      | 28 |
| Հարցեր և խնդիրներ                              | 29 |
| Գլուխ VI-ի կրկնության հարցեր                   | 30 |
| Լրացուցիչ խնդիրներ                             | 32 |

ԳԼՈՒԽ VII  
ՇՐՋԱՄԱԳԻԾ

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| 23 §1 Լարի միջնակետով անցնող շառավիղը | 34 |
| 17. Երկու կետերով անցնող շրջանագիծը   | 34 |
| 18. Լարի միջնակետով անցնող շառավիղը   | 35 |
| 19. Շրջանագծի որոշումը երեք կետերով   | 36 |
| Հարցեր և խնդիրներ                     | 37 |



|    |  |    |
|----|--|----|
| 24 | §2 Հրջանագծի շոշափող                                       | 38 |
|    | 20. Հրջանագծի և ուղղի փոխադարձ դասավորությունը             | 38 |
|    | 21. Հրջանագծի շոշափող                                      | 39 |
|    | Խնդիրներ   | 41 |
| 25 | §3 Կենտրոնային և մերգծյալ անկյուններ                       | 43 |
|    | 22. Հրջանագծի աղեղի աստիճանային չափը                       | 43 |
|    | 23. Թեղիքն մերգծյալ անկյան մասին                           | 45 |
|    | Խնդիրներ   | 46 |
|    | Խնդիրներ   | 49 |
| 26 | §4 Եռանկյան չորս նշանավոր կետերը                           | 49 |
|    | 24. Անկյան կիսողի և հատվածի միջնորդահայացի հատկությունները | 52 |
|    | 25. Թեղիքն եռանկյան բարձրությունների հատման կետի մասին     | 52 |
|    | 26. Եռանկյան միջնագծերի հատման կետը                        | 53 |
|    | Խնդիրներ   | 53 |
| 27 | §5 Ներգծյալ և արտագծյալ շրջանագծեր                         | 55 |
|    | 27. Ներգծյալ շրջանագիծ                                     | 55 |
|    | 28. Արտագծյալ շրջանագիծ                                    | 57 |
|    | Խնդիրներ   | 58 |
|    | Կառուցման խնդիրներ   | 60 |
|    | 29. Երկու շրջանագծերի փոխադարձ դասավորությունը             | 60 |
|    | 30. Կետերի երկրաչափական տեղը                               | 62 |
|    | Խնդիրներ   | 64 |
| 28 | §6 Պատկերացում գլանի, կոնի և գնդի մասին                    | 65 |
|    | 31. Պատկերացում գլանի մասին                                | 65 |
|    | 32. Պատկերացում կոնի մասին                                 | 66 |
|    | 33. Պատկերացում գնդի մասին                                 | 67 |
|    | Հարցեր և խնդիրներ  | 68 |
|    | Գլուխ VII-ի կրկնության հարցեր                              | 69 |
|    | Լրացուցիչ խնդիրներ   | 71 |
| 29 | ԳԼՈՒԽ VIII<br>ՄԱԿԵՐԵՆ                                      |    |
| 30 | §1 Բազմանկյան մակերեսը                                     | 75 |
|    | 34. Բազմանկյան մակերեսի հասկացությունը                     | 75 |
|    | 35. Քառակուսու մակերեսը                                    | 78 |
|    | 36. Ուղղանկյան մակերեսը                                    | 80 |
|    | Հարցեր և խնդիրներ  | 80 |
| 31 | §2 Զուգահեռագծի, եռանկյան և սեղանի մակերեսները             | 82 |
|    | 37. Զուգահեռագծի մակերեսը                                  | 82 |
|    | 38. Եռանկյան մակերեսը                                      | 83 |
|    | 39. Սեղանի մակերեսը  | 85 |
|    | Խնդիրներ   | 86 |



|  |    |
|--|----|
| 51 §3 Խորանարդի և ուղղանկյունանիստի մակերևույթների մակերեսները | 89 |
| 40. Խորանարդի մակերևույթի մակերեսը                             | 89 |
| 41. Ուղղանկյունանիստի մակերևույթի մակերեսը                     | 89 |
| Հարցեր և խնդիրներ  | 90 |

|   |    |
|---|----|
| 32 §4 Պյութագորասի թեորեմը                | 91 |
| 42. Պյութագորասի թեորեմը                  | 91 |
| 43. Պյութագորասի թեորեմի հակադարձ թեորեմը | 93 |
| Խնդիրներ                                  | 94 |
| Գլուխ VIII-ի կրկնության հարցեր            | 96 |
| Լրացուցիչ խնդիրներ                        | 96 |
| Հաշվարկիչի օգնությամբ լուծելու խնդիրներ   | 98 |

## ԳԼՈՒԽ IX ՆՄԱՍ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| 33 §1 Նման եռանկյունների սահմանումը | 100 |
| 44. Համեմատական հատվածներ           | 100 |
| 45. Նման եռանկյունների սահմանումը   | 100 |
| Հարցեր և խնդիրներ                   | 101 |

|  |     |
|--|-----|
| 34 §2 Եռանկյունների նմանության հայտանիշները          | 103 |
| 46. Եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշը        | 103 |
| 47. Եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշը       | 104 |
| 48. Եռանկյունների նմանության երրորդ հայտանիշը        | 105 |
| 49. Եռանկյունների նմանության մի քանի կիրառություններ | 105 |
| Հարցեր և խնդիրներ                                    | 107 |

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| Գլուխ IX-ի կրկնության հարցեր | 110 |
| Լրացուցիչ խնդիրներ           | 110 |
| Դժվարին խնդիրներ.            | 112 |
| Քառանկյուններ                | 112 |
| Մակերեսներ                   | 113 |
| Նման եռանկյուններ            | 114 |
| Շրջանագիծ                    | 115 |
| Պատասխաններ և ցուցումներ     | 118 |

Լրացված և փոխադրված կետերը 12-19, 26, 29, 31-33, 40, 41  
Լրացված և փոխադրված խնդիրները 4-9, 14, 18-23, 33, 35-42, 44-46, 48-50, 53, 54, 59-62, 67-71, 79-82, 86-103, 123-135, 138-140, 143, 145, 150, 161, 163-168, 170, 178, 195-198, 200-213, 217, 220-244, 274, 275, 278-283, 286, 294-298, 306-310, 312-314, 316, 318-321, 324-340, 345, 353, 358-361, 385-388, 396, 399-403, 406-411, 413-416, 418, 421-425, 428, 435-437, 440, 443, 445-449, 492:



Աթանասյան Էմմա Սերգեյի  
Բուսուրով վախճանողին Ֆյոդորի  
Կարոնցև Սերգեյ Բորիսի  
Պոզնյակ Էդուարդ Գենրիխի  
Յուդինա Իրինա Իգորի

Հրատարակումը նախապատրաստվել է  
ակադեմիկոս Ա. Ե. Տիտունովի գլխավորությամբ

### Երկրաչափություն

Հանրալրդական դպրոցի 7-րդ դասարանի դասագիրք

Թարգմանված է ռուսերեն 9-րդ հրատարակությունից:

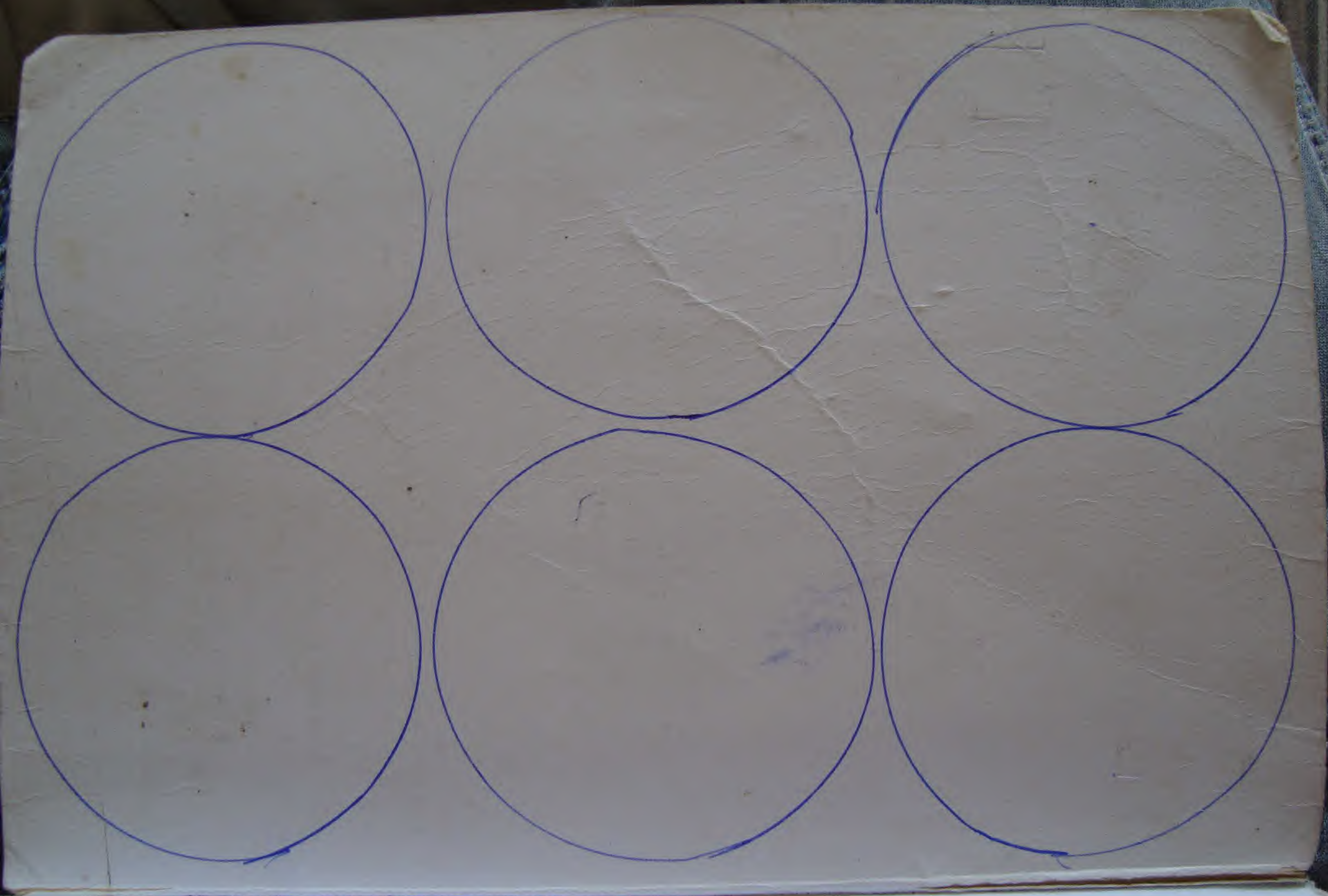
Պատագիրքը համապատասխանեցված է առարկայական ծրագրին,  
օգտագործվել են «Просвещение» հրատարակչության տրամադրած  
լրացուցիչ նյութերը:

Թարգմանությունը, փոխադրումները և խմբագրումը՝  
Սարիբնի Հակոբյանի

Մեթոդական մշակումը՝ Ռիտա Խաչատրյանի  
Թարգմանություն համադրումը՝ Գևորգ Ղարազնբակյանի  
Համակարգչային ձևավորումը՝ Գոհար Խաչատրյանի

Հրատարակիչ-տնօրեն՝ Ա. Յ. Չուբուկով  
Հրատարակ. խմբագիր՝ Գ. Ա. Ղարազնբակյան  
Վերստուգող սրբագրիչ՝ Ռ. Մ. Յակոբյան  
Սրբագրիչ՝ Ա. Խ. Մխիթարյան  
Հրատարակ. պատասխանատու՝ Ա. Մ. Բլբուլյան





*[Handwritten signature]*

ագրին,  
արդան



Quartz 52